КРИТЕРИЙ ОДНОРОДНОСТИ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

А. В. Буздалин

Задача выяснения однородности двух процессов восстановления, наблюдаемых на конечном интервале времени, имеет интерес не только, как чисто математическая проблема, но и, как проблема, имеющая прикладное значение. Приведем математическую формулировку проблемы.

Пусть $\left\{\tau_i^j\right\}_{i=1}^{\infty}, j=1,2$, два набора неотрицательных независимых одинаково распределенных случайных величин с непрерывными функциями распределения $F^j(u),\ j=1,2$. Положим $z_0^j=0$, $z_n^j=\sum_{i=1}^{n}\tau_i^j,\ j=1,2$. Тогда последовательности $\left\{z_i^j\right\}_{i=0}^{\infty}$, $j=1,2$ представляют собой простые процессы восстановления. Траектория процессов на интервале времени $[0,T]$ однозначно определяется векторами $\tau^j=\left\{\tau_1^j,\ldots,\tau_{\nu^j(T)}^j\right\}$, $j=1,2$, где $\nu^j(T)=\max\left\{n:\sum_{i=1}^{n}\tau_i^j\le T\right\}$-число восстановлений $j-$ого процесса на отрезке $[0,T]$.

Предположим, что имеется m реализаций процесса восстановления, порожденного распределением $F^1(u)$, и n реализаций процесса восстановления, порожденного распределением $F^2(u)$. По этим данным требуется построить критерий однородности двух процессов восстановления, наблюдаемых на конечном промежутке времени $[0,T]$.

Основная проблема построения критерия заключается в том, что элементы данных не являются независимыми, поскольку $\sum_{i=1}^{\nu^j(T)}\tau_i^j\le T$, $j=1,2$, и чем меньше временной интервал наблюдения $[0,T]$, тем сильнее будет зависимость. Таким образом, решение поставленной задачи не сводится к применению хорошо известных критериев однородности независимых данных.

Как было отмечено выше, процессы восстановления на интервале $[0,T]$ полностью задаются векторами $\tau^j=\left\{\tau_1^j,\ldots,\tau_{\nu^j(T)}^j\right\}$ (число элементов данных векторов случайно).

Ключевая идея решения проблемы будет заключаться в построении по векторам τ^j, $j = 1, 2$, специальных случайных величин η^j, $j = 1, 2$, которые будут однозначно задавать исходные процессы восстановления.

Первоначально построим семейство вспомогательных отображений $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $f_k : [0,1]^k \to [0,1]$. Если $a = (a^1, \ldots, a^k) \in [0,1]^k$, $a^i = 0, a_1^i a_2^i a_3^i \ldots, \quad i = 1, \ldots, k,$ десятичное представление чисел a^i, то положим

$$f_k(a) = o, a_1^1 a_1^2 \ldots a_1^k a_2^1 a_2^2 \ldots a_2^k a_3^1 a_3^2 \ldots a_3^k \ldots .$$

Если числа a^i можно представить в виде $\frac{p}{10^q}$, где $p, q \in \mathbf{N}$, то оно имеет два десятичных представления, одно с нулем в периоде, другое с девяткой в периоде. Для однозначного определения отображений условимся брать представления с девяткой в периоде.

Так построенные отображения обладают рядом “замечательных” свойств, а именно:

1. отображения f_k переводят различные точки $k-$ мерного куба $[0,1]^k$ в различные точки отрезка $[0,1]$;
2. отображения f_k измеримы;
3. отображения f_k переводят различно распределенные случайные вектора на $[0,1]^k$ в различно распределенные случайные величины на $[0,1]$

.

Свойство 1) легко проверяется, свойства 2),3) интуитивно очевидны, однако, требуют довольно громоздких доказательств. “Замечательность” же вышеперечисленных свойств заключается в возможности сведения изучения случайных векторов к изучению случайных величин. Идея использования при изучении случайных векторов специальных отображений $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ была рассмотрена в статье [1].

Вернемся теперь к процессам восстановления. Пусть случайные величины ξ^j, $j = 1, 2$, независимы и равномерно распределены на отрезке $[-1, 0]$. По векторам τ^j, $j = 1, 2$, имеющим случайное число компонент, построим случайные величины

$$\eta^j = \begin{cases} \xi^j, & \text{если} \quad \nu^j(T) = 0 \\ \nu^j(T) + f_{\nu^j(T)}\left(\frac{1}{T}\tau^j\right), & \text{если} \quad \nu^j(T) > 0 \end{cases}, \quad j = 1, 2. \tag{1}$$

Следующие теоремы утверждают, что случайные величины η^j, $j = 1, 2$, являются характеристиками процессов восстановления.

Теорема 1: пусть функции распределения $F^j(u)$, $j = 1, 2$, различны на отрезке $[0, T]$, тогда случайные величины η^j, $j = 1, 2$, различно распределены.

Теорема 2: пусть функции распределения $F^j(u)$, $j = 1, 2$, непрерывны на отрезке $[0, T]$, тогда случайные величины η^j, $j = 1, 2$, непрерывно распределены.

Перейдем теперь непосредственно к построению критерия однородности процессов восстановления. Возьмем m реализаций одного процесса восстановления и n реализаций другого, преобразуем их по формулам (1) и так полученные одномерные выборки объемов m и n сопоставим на основе критерия однородности Колмогорова-Смирнова, описание критерия можно найти, например, в книге [2]. Из теорем 1, 2 следует корректность так построенного статистического критерия.

Тем самым, поставленная задача решена. Однако, самым интересным в вышеописанном подходе, безусловно, является использование специальных отображений $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, сводящих изучение случайных векторов к изучению случайных величин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чепурин Е.В. “Статистические методы в теории надежности" // Обозрение прикладной и промышленной математики. -М., 1994.- Т. 1, вып. 2.- стр. 279-330.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. -М.: Наука, 1988.