Буздалин А.В.

Верификация прогнозов.
a-операторы.

α-*оператор является ключевым понятием в теории показателей ошибки. Его исследование является основой данной работы. Построение показателя ошибки по* α-*оператору- главная рассмотренная в ней проблема.*

Оглавление

Введение

Неотъемлемой составляющей апостериорной оценки качества экспертного прогноза является его точность. Этот параметр представляет собой ключевое звено в процессе повышения качества прогноза.

Ю.В.Сидельниковым в его монографии "Теория и организация экспертного прогнозирования". Чтобы дать заключение относительно оценки качества прогноза, нам, по крайней мере, необходимо иметь три оценки: нашу, истинное значение искомого параметра исследуемого объекта и ту экспертную оценку, с которой мы будем сравнивать взятую нами. Сопоставляя с истиной две экспертные оценки, мы ставим задачу выяснить, какая из них лучше (точнее).

Ю.В. Сидельников предлагает в качестве характеристики точности оценки взять показатель ошибки, а именно, под показателем ошибки понимается произвольная действительная функция $E(x,y)$, где x принадлежит множеству всевозможных экспертных оценок X, y принадлежит множеству истинных значений Y, $X \subseteq Y$, причем Y - линейно упорядоченное множество отношением "$\leq$", предполагается, что X - связанное множество в топологии индуцируемой линейным порядком. Функция $E(x,y)$ должна удовлетворять следующим пяти аксиомам:

1) $E(x,y) = 0 \iff x = y$;
2) $E(x,y) \geq 0$;
3) для любого фиксированного x функция $E(x,y)$ строго монотонно убывает на луче $\{y \in Y : y < x\}$ и монотонно возрастает на луче $\{y \in Y : y > x\}$;
4) для любого фиксированного y функция $E(x,y)$ строго монотонно убывает на луче $\{x \in X : x < y\}$ и строго монотонно возрастает на луче $\{x \in X: x > y\}$;
5) $E(x,y)$ непрерывна по y относительно порядковой топологии.

Таким образом, функция $E(x,y)$ показывает, насколько экспертная оценка x отстоит от истинного значения оцениваемого параметра .

Важным понятием в теории показателей ошибки является понятие эквивалентности показателей. Всю совокупность всевозможных показателей ошибки можно разбить на классы эквивалентности так, что показатели E' и E'' из одного класса будут давать одинаковые заключения о точности экспертных оценок x', x'' оцениваемого параметра y, т.е.

$$\mathit{sign}\,(E'(x',y) - E'(x'',y)) = \mathit{sign}\,(E''(x',y) - E''(x'',y)).$$

Характеристикой класса эквивалентности является α-оператор (α: $X \times X \rightarrow Y$), который определяется как решение уравнения

$$E(x',\alpha) - E(x'',\alpha)=0. \qquad (1)$$

Для показателей ошибки из одного класса эквивалентности α-операторы совпадают, а для показателей из разных классов различаются. Ю.В.Сидельниковым была доказана теорема о существовании и единственности в рамках аксиом 1)-5) показателя ошибки α-оператора.

Уравнение (1) позволяет понять практический смысл α-оператора: α-оператор играет роль "среднего" для экспертных оценок x' и x''. Иными словами, если x' и x'' - две различные экспертные оценки, равноотстоящие по значениям показателя ошибки от истинного значения, то их среднее, как $\alpha(x', x'')$, и будет являться истинным значением оцениваемого параметра. В работе Ю.В.Сидельникова были даны соответствия между некоторыми показателями ошибки и α-операторами. Так, показателю ошибки $E(x,y)=|x - y|$ отвечает в качестве α-оператора среднее арифметическое значение x' и x'', показателю $E(x,y)=|ln(x/y)|$ - среднее геометрическое, а показателю $E(x,y)= |x-y|/x$ - среднее гармоническое.

Иногда, имея представление о природе оцениваемого параметра, удобнее первоначально построить α-оператор, а не показатель ошибки. В пользу предпочтительности данного подхода говорит и то, что одному α-оператору отвечает целый класс эквивалентных показателей ошибки. Однако, задача построения показателя по α-оператору, вообще говоря, нетривиальна. Ю.В.Сидельниковым была сформулирована теорема, позволяющая строить показатель по α-оператору, имеющему вид среднего взвешанного точечных экспертных оценок. Решение этой проблемы в более общих случаях- основная цель моего исследования.

В моей работе будут рассматриваться α-операторы и показатели ошибки только на одноточечных экспертных оценках, то есть множество допустимых истинных значений Y оцениваемого экспертами параметра является подмножеством действительной оси R. Причем, на множество допустимых экспертных оценок X будет наложено ограничение связанности. Учитывая вышеизложенное замечание, как было доказано в [1], можно корректно определить α-оператор. Естественным образом возникает обратный вопрос описания в функциональных терминах совокупности всех α-операторов {α}, то есть, как по виду произвольной функции α(x', x'') понять, отвечает ли ей какой-либо показатель ошибки или нет. При этом, хотелось бы не только уметь распознавать α-операторы, но и уметь по ним конструктивно строить соответствующие показатели ошибки. Некоторые ответы на эти вопросы удалось получить.

В первой части исследования рассматривается вопрос распознавания α-операторов, то есть нахождения их отличительных свойств, и некоторые из них были найдены, однако не удалось найти полной системы свойств, позволяющей однозначно утверждать, является ли та или иная функция α-оператором. Поэтому, во второй части вводятся определения условий "нормальности" и "квазинормальности", а в пятой- краевой монотоности, которые накладывают вполне допустимые ограничения на множество рассматриваемых α-операторов. Третья и четвертая часть посвящена изучению введенных свойств, а в шестой части доказывается теорема о том, что если произвольная функция α удовлетворяет свойствам, полученным в первой части, и свойствам нормальности или квазинормальности, то она является α-оператором, при этом удалось получить в явном виде формулу соответствующего показателя ошибки.

Таким образом, решина задача распознавания α-оператора и построения по нему показателя ошибки для достаточно широкого класса α-операторов на одноточечных экспертых оценках.

1. Три свойства a-оператора.

Целью этой части работы будет нахождение свойств α-операторов или условий, которым они удовлетворяют. Зная отличительные свойства α-операторов, мы сможем, хотябы предварительно, сказать по виду некоторой функции $\alpha(x', x'')$, сможет ли она выступать, как среднее двух экспертных оценок x', x'' или нет.

Теорема 1: *пусть отображение* $\alpha: X \times X \to Y$ *является* α- *оператором для некоторого показателя ошибки, тогда*

1) $\alpha(x',x'') = \alpha(x'',x')$, $\forall\, x', x'' \in X$ *(условие симметричности);*

2) $\min\{x',x''\} \le \alpha(x',x'') \le \max\{x',x''\}$ $\forall\, x', x'' \in X$ *(условие среднего);*

3)$\alpha(x', x'')$ покоординатно строго монотонно возрастает на X *(условие сторогой монотонности)*;

Доказательство: Условие симметричности очевидным образом следует из определения α-оператора уравнением (1). Условие среднего тривиально получить из аксиомы 4) показателя ошибки и уравнения (1). Перейдем к доказательству условия строгой монотонности. Из условия симметричности следует, что достаточно доказать строгую монотонность только по одной переменной. Доказательство будем вести от противного.

Допустим что $\exists\, x_1', x_2' \in X : x_1' < x_2'$ и $\alpha(x_1', x'') \ge \alpha(x_2', x'')$.

Рассмотрим три случая: а) $x'' \le \alpha(x_2', x'')$;

б) $\alpha(x_2', x'') \le x'' \le \alpha(x_1', x'')$;

в) $x'' \ge \alpha(x_1', x'')$.

б) этот случай наиболее прост. Из условия среднего следует, что

$$x_2' \le x'' \le x_1',$$

это противоречит предположению $x_1' < x_2'$.

а) из аксиомы 3) следует, что

$$E(x'',\alpha(x_2', x'')) = E(x_2', \alpha(x_2', x'')).$$

Из уравнения (1) получаем

уравнения (1) получаем

$$E(x'',\alpha(x_2', x'')) = E(x_2', \alpha(x_2', x'')).$$

$$E(x'',\alpha(x_1', x'')) = E(x_1', \alpha(x_1', x'')). \qquad (4)$$

Из (3) и (4) имеем

$$E(x_2', \alpha(x_2', x'')) < E(x_1', \alpha(x', x'')). \qquad (5)$$

Так как из свойства среднего $x_1' \ge \alpha(x_1', x'')$, но

$$x_2' > x_1' \ge \alpha(x_1', x''),$$

откуда с учетом аксиомы 4) получаем

$$E(x_1', \alpha(x_1', x'')) < E(x_2', \alpha(x_1', x'')), \qquad (6)$$

а из аксиомы 3) следует

$$E(x_2', \alpha(x_1', x'')) < E(x_2', \alpha(x_2', x'')). \qquad (7)$$

Сравнивая (6) и (7) получаем

$$E(x_2', \alpha(x_2', x'')) < E(x_1', \alpha(x_1', x'')). \qquad (8)$$

Из (5) и (8) получаем противоречие.

в) из аксиомы 3) следует, что

$$E(x'', \alpha(x_2', x'')) < E(x'', \alpha(x_1', x'')). \qquad (9)$$

Из уравнения (1) получаем

$$E(x'', \alpha(x_2', x'')) = E(x_2', \alpha(x_2', x'')).$$

$$E(x'', \alpha(x_1', x'')) = E(x_1', \alpha(x_1', x'')). \qquad (10)$$

Из (9) и (10) имеем

$$E(x_2', \alpha(x_2', x'')) > E(x_1', \alpha(x_1', x'')). \qquad (11)$$

Так как из свойства среднего $x_2' \leq \alpha(x_2', x'')$, но

$$\alpha(x2', x'') \geq x2' > x1',$$

откуда с учетом аксиомы 4) получаем

$$E(x_1', \alpha(x_2', x'')) > E(x_2', \alpha(x_2', x'')). \qquad (12)$$

а из аксиомы 3) следует

$$E(x_1', \alpha(x_1', x'')) > E(x_1', \alpha(x_2', x'')). \qquad (13)$$

Сравнивая (12) и (13) получаем

$$E(x_1', \alpha(x_1', x'')) > E(x_2', \alpha(x_2', x'')). \qquad (14)$$

Из (11) и (14) получаем противоречие.

Таким образом, теорема полностью доказана.

2. Нормальные и квазинормальные α- операторы.

В предыдущей части работы были получены отличительные свойства α-операторов, однако, полученный набор свойств не является полным, то есть не каждая функция $\alpha(x', x'')$, обладающая полученными свойствами, является а-оператором или усреднением экспертных оценок x', x''. Поэтому, приходится ввести ограничительные условия нормальности и квазинормальности на класс рассматриваемых α-операторов. Этому и будет посвящена вторая часть работы. Допустимость налагаемых ограничений будет объяснина ниже.

Пусть $y =\alpha(x', x'')$ - функция, удовлетворяющая условиям симметричности, среднего и строгого монотонного возрастания, тогда через $\alpha^{-1}(y|x'')$ обозначим функцию, которая в точке y принимает значение x', то есть $\alpha^{-1}(y|x'')$ является обратной функцией к $\alpha(x', x'')$ при фиксированной координате x''. Областью определения такой функции будет множество $\{\alpha(x', x'')|x' \in X\}$. Корректность определения следует из условия строгого монотонного возрастания.

Пусть $x \in X$, определим следующее множество,

$$\Lambda(x)=\{\alpha(z,x) \mid z\in X,\ z >x\}. \qquad (15)$$

Лемма 1: *если* $x', x''\in X$ и $x'< x''$, *то*

$$x'< \sup\Lambda(x') \leq \sup\Lambda(x'').$$

Доказательство:

$$\sup\Lambda(x') = \sup\{\alpha (z,x') \mid z \in X,\ z >x'\},$$

из условия строгого монотонного возрастания получаем

$$\sup \Lambda(x')=\sup\{\alpha(z,x') \mid z\in X,\ z > x''\},$$

но

$$\alpha(z,x') \leq\{\alpha(z,x'') \ \forall\ z > x'',\ z\in X,$$

следовательно,

$$\{\alpha(z,x') \mid z\in X,\ z > x''\}\leq \{\alpha(z,x'') \mid z\in X,\ z > x''\}= \sup \Lambda(x''),$$

из условия среднего имеем

$$x'< \sup \Lambda(x'),$$

таким образом,

$$x'< \sup \Lambda(x') \leq \sup \Lambda(x'').$$

Замечание: *в предыдущей лемме предполагается, что* sup $\Lambda(x)$ *может принимать значение* ¥.

Лемма 2: $\Lambda(x)$ *представляет собой счетное дизъюнктивное объединение связанных множеств.*

Доказательство: данное утверждение следует из того, что монотонная функция имеет не более чем счетное число точек разрыва (см. [2]), а функция $\alpha(x', x'')$ удовлетворяет условию строгого монотонного возрастания.

Определение 1 *(свойство нормальности): будем говорить, что* α- оператор $\alpha(x', x'')$ *является нормальным, если функция*

$$z-\alpha(z,x)$$

монотонно возрастает на множестве $\{z\in X \mid z > x\}$.

Определение 2: *будем говорить, что* α- *оператор* $\alpha(x', x'')$ *является нормальным, если функция*

$$\alpha^{-1}(y \mid x) - y$$

монотонно возрастает на множестве $\Lambda(x)$.

Эквивалентность данных определений следует из (15) и свойства строгой монотонности α-оператора.

Очевидно, стоит прокомментировать слово "нормальным" в вышеизложенных определениях, а именно, насколько нормальным является α-оператор, удовлетворяющий определениям 1,2. Из свойства строгой монотонности следует, что, при фиксированном значении α-оператора $y = \alpha(x', x'')$ и возрастающей, например, первой координате, вторая координата будет обязательно убывать, то есть при фиксированном среднем значении экспертных оценок $\alpha(x', x'')$ расстояния от экспертных оценок x', x'' до среднего $\alpha(x', x'')$ могут возрастать или убывать только одновременно. Однако, ниоткуда не следует, что, при фиксированном значении одной экспертной оценки и изменяющейся другой, расстояния от экспертных оценок x', x'' до среднего $\alpha(x', x'')$ будут возрастать или убывать только одновременно, хотя данное свойство кажется вполне естественным. Определения 1,2 и определяют это естественное свойство нормальным. Более того, α-операторы, имеющии вид среднего взвешенного, среднего геометрического или гормонического, являются нормальными, что легко проверяется.

Определене 3: *будем говорить, что* α- *оператор инвариантен относительно сдвига, если для любых* $x', x''\in X$ *и любого* δ *такого, что* $x'+\delta, x''+\delta\in X$

$$\alpha(x'+\delta, x''+\delta) = \alpha(x', x'')+\delta.$$

Пример: α-оператор вида

$\alpha(x', x'') = p \cdot \mathit{min}\ \{x', x''\} + q \cdot \mathit{max}\ \{x', x''\}$, где $p,q > 0$, $p+q = 1$,

является инвариантным относительно сдвига.

Утверждение 1: *если* α- *оператор инвариантен относительно сдвига, то он нормален.*

Доказательство: пусть $\delta>0$, $z\in X$ такие, что $z+\delta \in X$, тогда

$$\begin{aligned} & z+\delta - \alpha(z+\delta, x) = \\ &= z+\delta - \alpha(z+\delta, x+\delta) + \alpha(z+\delta, x+\delta) - \alpha(z+\delta, x) = \\ &= z+\delta - \alpha(z,x) - \delta + \alpha(z+\delta, x+\delta) - \alpha(z+\delta, x) \geq \\ &\geq z - \alpha(z,x). \end{aligned}$$

Определение 4 *(свойство квазинормальности)*: *будем говорить, что* α-*оператор* $\alpha(x', x'')$ *является квазинормальным, если существует такая непрерывная фкнкция* $\Phi(y)$ *на* X, *причем строго монотонно возрастающая, что*

$$\Phi(z)-\Phi(\alpha(z,x))$$

монотонно возрастает на множестве $\{z\in X \mid z>x\}$.

Определение 5: *будем говорить, что* α-*оператор* $\alpha(x', x'')$ *является квазинормальным, если существует такая непрерывнная функция* $\Phi(y)$ *на* X,

$$\Phi(\alpha^{-1}(y|x))-\Phi(y)$$

монотонно возрастает на множестве $\Lambda(x)$.

Эквивалентность определений 4,5 следует из (15) и свойства строгой монотонности α-оператора, а объяснение названия "квазинормальный оператор" будет дано ниже.

Пример: α -операторы

$$\alpha(x', x'')= p\cdot\min\{x', x''\} + q\cdot\max\{x', x''\},$$

$$\alpha(x', x'')= \Phi^{-1}[p\,\Phi(\min\{x', x''\}) + q\,\Phi(\max\{x', x''\})],$$

где $p+q=1$, $p,q>0$, а $\Phi(\bullet)$ - непрерывная строго возрастающая функция, является квазинормальными α-операторами. Стоит отметить, что функция $\alpha(x', x'')$, имеющая вид среднего взвешенного в явном виде, а именно:

$$\alpha(x', x'')= px'+ qx'', \text{ где } p\neq 1/2,$$

не является α-оператором, так как не удовлетворяет условию симметричности.

Утверждение 2: *нормальный оператор является также квазинормальным.*

Доказательство: если в определении квазинормального α-оператора положить функцию $\Phi(y)=y$, то, как нетрудно понять, определение квазинормальности полностью совпадет с определением нормальности α-оператора, что доказывает утвержление.

3. **Свойства непрерывности нормальных и квазинормальных α-операторов.**

Утверждение 3: *квазинормальный* α- *оператор* $\alpha(z,x)$ *является непрерывным по первой координате на множестве* $\{z\in X \mid z>x\}$.

Доказательство: пусть квазинормальному оператору отвечает функция $\Phi(\bullet)$ и пусть $\delta>0$ и $z+\delta$, $z-\delta\in\{z\in X \mid z>x\}$, тогда из определения квазинормальности получаем:

$$\Phi(z+\delta)-\Phi(\alpha(z+\delta,x))\geq\Phi(z)-\Phi(\alpha(z,x)),$$
$$0<\Phi(\alpha(z+\delta,x))-\Phi(\alpha(z,x))\leq\Phi(z+\delta)-\Phi(z),$$

и

$$\Phi(z-\delta)-\Phi(\alpha(z-\delta,x))\leq\Phi(z)-\Phi(\alpha(z,x)),$$
$$0>\Phi(\alpha(z-\delta,x))-\Phi(\alpha(z,x))\geq\Phi(z-\delta)-\Phi(z),$$

откуда

$$|\Phi(\alpha(z\pm\delta,x))-\Phi(\alpha(z,x))|\leq|\Phi(z\pm\delta)-\Phi(z)|.$$

Так как функция $\Phi(\bullet)$ непрерывна, то правая часть предыдущего неравенства стремится к 0 при $\delta\to0$, следовательно, и левая часть должна стремится к нулю, а так как функция $\Phi(\bullet)$ еще и строго возрастающая, то и $\alpha(z\pm\delta)$ стремится к $\alpha(z,x)$, что и требовалось доказать.

То, что квазинормальный α-оператор $\alpha(z,x)$, как и нормальный, является обязательно непрерывным по первой координате на множестве $\{z\in X \mid z>x\}$, частично объясняет, почему квазинормальный α-оператор называется квазинормальным. Ниже будет показано, что по квазинормальным α-операторам можно строить аналогично, как и по нормальным α-операторам, соответствующие показатели ошибки.

Лемма 3: *для нормальных и квазинормальных* α*-операторов множество* $\Lambda(x)$ *всегда является связанным и представляет собой интервалили полуинтервал вида*

$$\Lambda(x) = (x,\sup\{\alpha(z,x) \mid z\in X,\ z>x\}\}.$$

Доказательство: так как α-оператор нормален или квазинормален, то из утверждения 3 следует, что α-оператор $\alpha(z,x)$ непрерывен по первой координате на связанном множестве $\{z\in X,\ z>x\}$, таким образом, (см. [2]) множество $\Lambda(x)$ будет связанным, как непрерывный образ связанного множества. При этом из условия среднего и условия строгого монотонного возрастания α-оператора будет следовать, что

$$\Lambda(x)=(x,\ \sup\{\alpha(z,x) \mid z\in X,\ z>x\}\}.$$

4. Достаточные условия нормальности и квазинормальности α-операторов.

Хотя условия нормальности и квазинормальности являются вполне допустимыми ограничениями на класс рассматриваемых показателей ошибки, зачастую сложно понять, удовлетворяет ли та или иная функция $\alpha(x', x'')$ условиям нормальности или квазинормальности. В этой части работы будут сформулированы и доказаны некоторые достаточные условия нормальности и квазинормальности операторов.

Утверждение 4: *пусть для любых* $x,z\in X$, $x<z$ α*-оператор* $\alpha(\bullet,x)$ *имеет частную производную по первой координате в точке* z $\alpha'(z,x)$, *тогда* α*- оператор нормален тогда и только тогда, когда*

$$\alpha'(z,x)\le 1 \qquad (16)$$

Доказательство: будем использовать определение 1 нормальности. По предположению α-оператор $\alpha(\bullet,x)$ имеет частную производную по первой координате на множестве $\{z \in X,\ z>x\}$, тогда необходимым и достаточным условием монотонного возрастания функции $z-\alpha(z,x)$ на множестве $\{z \in X,\ z>x\}$ будет являться (см. [2]) дифференцируемость по z функции $z-\alpha(z,x)$ на множестве $\{z \in X,\ z>x\}$ и неотрицательность производной

$\frac{\partial}{\partial z}(z-\alpha(z,x))$ на $\{z \in X,\ z>x\}$. То есть

$$\frac{\partial}{\partial z}(z-\alpha(z,x)) \ge 0,$$

$$1 - \alpha'(z,x) \ge 0,$$

$$\alpha'(z,x) \le 1,$$

именно это и есть доказываемое утверждение.

Утверждение 5: *пусть для любых* $x,\ z \in X$, $x<z$ α*-оператор* $\alpha(\bullet,x)$ *имеет частную производную по первой координате в точке* z $\alpha'(z,x)$, *тогда* α*-оператор квазинормален со всюду дифференцируемой на X функцией* $\Phi(x)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\Phi'(z) \geq \alpha'(z,x)\,\Phi'(\alpha(z,x)).$$

Доказательство: сформулированное утверждение эквивалентно тому, что функция

$$[\Phi(z) - \Phi(\alpha(z,x))]$$

имеет неотрицательную производную на множестве $\{x, z \in X, x>z\}$, а это является необходимым и достаточным условием монотонно возрастания на множестве $\{x, z \in X, x>z\}$, то есть квазинормальности α-оператора со всюду дифференцируемой функцией $\Phi(z)$. Утверждение доказано.

5. Условие краевой монотонности.

Во второй части работы были введены условия нормальности и квазинормальности, накладывающие некоторые ограничения на класс рассматриваемых α-операторов. Однако, и эти условия вместе с условиями среднего, симметричности и строгого монотонного возрастания не составляют ситемы условий, определяющих α-оператор. Введем еще одно ограничительное условие (условие краевой монотонности), которое вместе предыдущими условиями уже будет определять α-оператор.

Определение 6 *(условие краевой монотонности)***:** *оператор* $\alpha(x', x'')$ *удовлетворяет условию краевой монотонности тогда и только тогда, когда*

*1)*если $sup\mathbf{X} = \infty$, то $sup\Lambda(x) = \infty$;

*2)*если $sup\mathbf{X} < \infty$, то $sup\Lambda(x)$ *строго монотонно возрастает на* X.

Стоит прокомментировать допустимость ограничений, накладываеых условием краевой монотонности на класс рассматриваемых α-операторов. Если $sup\mathbf{X} = \infty$, то это означает, что эксперт может давать сколь угодно большие оценки. В этом случае, кажется вполне естественным, что α-оператор, как среднее двух экспертных оценок, может принимать сколь угодно большие значения, при фиксированной одной из них. То есть усреднением бесконечности и конечной экспертной оценки является бесконечность. Иными словами, конечная и бесконечная экспертные оценки не могут быть одинаково хорошими оценками конечного истинного значения y. Именно это ограничение накладывает условие $sup\mathbf{X} = \infty$. Если $sup\mathbf{X} < \infty$, то из условия среднего следует, что $sup\Lambda(x) < \infty\ \forall x \in X$.

По лемме 1 функция $sup\Lambda(x)$ монотонно возрастает на X, однако, ни откуда не следует, строгое монотонное возрастание, хотя, это свойство кажется вполне естественным. Если $sup\mathbf{X} \in X$, то есть множество допустимых экспертных оценок X имеет максимум, то строгое монотонное возрастание $sup\Lambda(x)$ следует из условия строгого монотонного возрастания α-оператора, так-как $sup\Lambda(x) = \alpha(x, max\, X)$. Если же $sup\mathbf{X} \notin X$ и функция $sup\Lambda(x)$ имеет участок постоянства $x_1 < x < x_2$, то при различных оценках $x_1', x_2' \in (x_1,x_2)$ и экспертной оценке x'' близкой к $sup\mathbf{X}$, $\alpha(x_1',x'') \approx \alpha(x_2',x'')$, то есть среднии принципиально различных пар экспертных оценок (x_1',x''), (x_2',x'') могут быть сколь угодно близки, что кажется мало приемлемым. Таким образом, условие краевой монотонности представляется вполне допустимым ограничением на класс рассматриваемых α-операторов.

6. Построение по α-оператору показателя ошибки.

Содержательной частью следующих теорем будет построение по произвольному отображению $\alpha(x',x'')$, удовлетворяющему условиям симметричности, среднего, строгой монотонности и некоторым ограничениям, показателя ошибки.

Замечание: следующии теоремы будут формулироваться для нормальных и квазинормальных α-операторов, поэтому следует учитывать, что согласно лемме 3 множество Y представимо в виде дизъюнктивного объединения трех связанных компонент:

$Y = \{y\in Y \mid y\le x\} \cup \Lambda(x) \cup \{y\in Y \mid y\notin \Lambda(x), y>x\}$.

Теорема 2: *пусть* α: $X\times X\to Y$ *удовлетворяет условиям симметричности, среднего, строгой монотонности, нормальности и условию краевой монотонности, тогда функция*

$$
\begin{aligned}
E(x,y) &= x-y && \textit{если } y\le x;\\
&= \alpha^{-1}(y|x)-y && \textit{если } y\in\Lambda(x);\\
&= \mathit{sup}X - \mathit{sup}\,\Lambda(x) && \textit{если } y\notin\Lambda(x),\ y>x;
\end{aligned}
$$

является показателем ошибки, причем функция $\alpha(x',x'')$ *является его* α-*оператором.*

Доказательство: Первоначально докажем корректность определения функции E(x,y). Согласно предыдущему замечанию множества $\{y\in Y \mid y\le x\}$, $\{y\in Y \mid y\notin \Lambda(x), y>x\}$, $\Lambda(x)$ составляют дизъюнктивное разбиение множества Y. Сомнений в корректности определения E(x,y) на множестве $\{y\in Y \mid y\le x\}$ не возникает. Корректность определения E(x,y) на множестве $\Lambda(x)$ следует из того, что множество $\Lambda(x)$ лежит в области определения функции $\alpha^{-1}(y|x)$. Корректность определения E(x,y) на множестве $\{y\in Y \mid y\notin \Lambda(x), y>x\}$ следует из условия краевой монотонности, $\{y\in Y \mid y\notin \Lambda(x), y>x\}$ существует тогда и только тогда, когда существуют $\mathit{sup}X$ и $\mathit{sup}\,\Lambda(x)$. Таким образом, вопрос корректности определения полностью разобран.

Прежде чем преступить к непосредственному доказательству теоремы, установим следующее равенство:

$$\mathit{sup}\{\alpha^{-1}(u|x)-u \mid u\in\Lambda(x)\} = \mathit{sup}X - \mathit{sup}\,\Lambda(x), \text{ если } \mathit{sup}X < \infty. \tag{17}$$

Действительно

$$\mathit{sup}\{\alpha^{-1}(u|x)-u \mid u\in\Lambda(x)\} = \mathit{sup}\{\alpha^{-1}(\alpha(x,z) \mid x)- \alpha(x,z) \mid z\in X, z>x\} = \mathit{sup}\{z-\alpha(x,z) \mid z\in X, z>x\}.$$

Из условий нормальности и строгого монотонного возрастания получаем

$$\mathit{sup}\{z-\alpha(x,z) \mid z\in X, z>x\}= \mathit{sup}X - \mathit{sup}\,\Lambda(x).$$

Дальнейшее доказательство теоремы будет состоять из двух частей: в первой части проверим, что заданная функция E(x,y) является показателем ошибки, а во второй части проверим, что α-оператором этого показателя ошибки является функция $\alpha(x',x'')$. Проверим последовательно пять аксиом показателя ошибки.

1) Если $x=y$, то $E(x,y)=0$, это очевидно. Если $E(x,y)=0$, то $y\le x$, так как на множестве $\Lambda(x)$ функция $\alpha^{-1}(u|x)-u$ не обращается в нуль ($\alpha^{-1}(u|x)=y \Rightarrow \{\alpha(y,x)=y \Rightarrow x=y$, но из (15) $y>x$), следовательно, $x-y=0$.

2) Проверим, что $E(x,y)\ge 0$. Если $y\le x$, то $E(x,y)=x-y\ge 0$, если же $y>x$, то вопрос сводится, учитывая равенство (17), к доказательству неотрицательности функции $\alpha^{-1}(y|x)-y$ на множестве $\Lambda(x)$. Действительно, если $y\in\Lambda(x)$ и $z=\alpha^{-1}(y|x)$, то $y=\alpha(z,x)$, а из условия среднего получаем $x<y<z$, следовательно, $\alpha^{-1}(y|x)-y>0$.

3) Проверим соответствующии свойства монотонности функции $E(x,y)$ при фиксированном значении экспертной оценки x. На множестве $\{y\in Y \mid y\leq x\}$ показатель ошибки имеет простой вид, $E(x,y)=x-y$, поэтому вопроса о строгом монотонном убывании $E(x,y)$ на $\{y\in Y \mid y\leq x\}$ не возникает. Вопрос же доказательства монотонного возрастания $E(x,y)$ на $\{y\in Y \mid y> x\}$ сводится, как нетрудно понять из равенства (17), к доказательству монотонного возрастания функции $\alpha^{-1}(y|x)-y$ на множестве $\Lambda(x)$, но функция $\alpha^{-1}(y|x)-y$ на множестве $\Lambda(x)$, монотонно возрастает, так как функция $\alpha(x', x'')$ удовлетворяет свойству нормальности. Таким образом, аксиома 3) полностью доказана.

4) Проверим соответствующии свойства монотонности функции $E(x,y)$ при фиксированном истинном значении оцениваемого параметра. На множестве $\{x\in X \mid y\leq x\}$ показатель ошибки имеет простой вид, $E(x,y)= x-y$, поэтому вопроса о строгом монотонном возрастании $E(x,y)$ на $\{x\in X \mid y\leq x\}$ не возникает. Строгое монотонное убывание $E(x,y)$ на $\{x\in X \mid y>x\}$ доказывается несколько сложнее.

Пусть $x_1<x_2<y$, тогда с учетом леммы 1 возможны следующии три варианта нахождения y:

а) $y\in \Lambda(x_2) \cap\Lambda(x_1)$;

б) $y\in \Lambda(x_2) \setminus \Lambda(x_1)$;

в) $y\notin \Lambda(x_2) \cup\Lambda(x_1)$.

Рассмотрим их по-отдельности.

а) $y\in \Lambda(x_2)$, $y\in \Lambda(x_1)$. Таким образом, функция $\alpha^{-1}(y,\bullet)$ определена в точках x_1, x_2. Условия строгого монотонного возрастания и среднего функции $\alpha(x_1, x_2)$ позволяют утверждать, что функция $\alpha^{-1}(y,\bullet)$ строго монотонно убывает на своей области определения. Действительно, пусть

$$z_i = \alpha^{-1}(y,x_i),\ i= 1,2,$$

тогда

$$y=\alpha(z_i,x_i).$$

Но $x_1 < x_2$, следовательно, $z_1 > z_2$.

Таким образом,

$$\alpha^{-1}(y,x_1)> \alpha-1(y,x2),$$

$$\alpha^{-1}(y,x_1)-y> \alpha^{-1}(y,x_2)-y,$$

то есть

$$E(x_1,y) > E(x_2,y),$$

что и требовалось доказать.

б) в этом случае

$$E(x_1,y) = \mathit{sup}X - \mathit{sup}\,\Lambda(x_1).$$

Имеем

$$\mathit{sup}\,\Lambda(x_1)\leq y, \qquad (18)$$

$$\alpha^{-1}(y| x_2) \leq \mathit{sup}X \qquad (19)$$

причем равенства в предыдущих двух неравенствах не могут достигаться одновременно, действительно, если

$$\mathit{sup}\,\Lambda(x_1) = y,$$

$$\alpha^{-1}(y| x_2) = \mathit{sup}X,$$

то

$$\alpha^{-1}(\textit{sup}\,\Lambda(x_1)\mid x_2) = \textit{sup}X,$$

$$\textit{sup}\,\Lambda(x_1) = \alpha\,(\textit{sup}X\,,\,x_2) = \textit{sup}\,\Lambda(x_2),$$

а это противоречит условию краевой монотонности.

Следовательно, из (18),(19) получаем

$$\alpha^{-1}(y\mid x_2)-y < \textit{sup}X-\textit{sup}\,\Lambda(x_1),$$

то есть

$$E(x_1,y) > E(x_2,y),$$

что и требовалось доказать.

в) В этом случае

$$E(x_1,y) = \textit{sup}X-\textit{sup}\,\Lambda(x_1),$$

а

$$E(x_2,y) = \textit{sup}X-\textit{sup}\,\Lambda(x_2).$$

Из условия краевой монотонности следует, что

$$\textit{sup}\,\Lambda(x_1) < \textit{sup}\,\Lambda(x_2),$$

$$\textit{sup}X-\textit{sup}\,\Lambda(x_2) < \textit{sup}X-\textit{sup}\,\Lambda(x_1),$$

то есть

$$E(x_1,y) > E(x_2,y),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, аксиома 4) показателя ошибки полностью доказана.

5) Пусть $y_0\in Y$, проверим, что $E(x,y)$ непрерывна в точке y_0 при фиксированной координате . Возможны следующие варианты:

а) $y_0 < x$;

б) $y_0 = x$;

в) $y_0 > x$;

Рассмотрим их по-отдельности.

а) В этом случае при y близких к y_0 , $E(x,y) = x-y$, и вопроса о непрерывности показателя ошибки не возникает.

б) В этом случае

$$\lim_{\delta\to 0+} E(x,\, y_0-\delta) = \lim_{\delta\to 0+} x - y_0+\delta = 0$$

непрерывность же справа докажем в следующем пункте.

в) Пусть $\gamma(y)= \alpha^{-1}(y\mid x)-y$, из свойства нормальности следует монотонное возрастание $\gamma(y)$ на $\Lambda(x)$. Исходя из этого и определения $E(x,y)$ для доказательства непрерывности $E(x,y)$ в точке $y_0>x$ и непрерывности справа в точке $y_0 = x$, учитывая равенство (17), достаточно проверить, что образ $\gamma(\,\Lambda(x))$ представляет собой связанное множество и $\textit{inf}\,\gamma(\,\Lambda(x)) = 0$. Но

$$\gamma(\,\Lambda(x))=\{\, z - \alpha(x,z)\mid z\in X,\ z > x\}.$$

Множество $\{z\in X,\ z > x\}$ очевидно связанное, а из утверждения 3 следует непрерывность $z - \alpha(x,z)$ на $\{z\in X,\ z > x\}$, таким образом получаем, что $\gamma(\,\Lambda(x))$ связано (см. [2]). Из свойства среднего имеем

$$\lim_{z\to x+} (z-\ \alpha(x,z)\,)= 0,$$

значит

$$\textit{inf}\,\gamma(\,\Lambda(x)) = \lim_{z\to x+} (z-\ \alpha(x,z)\,)= 0,$$

Тем самым, проверены все аксиомы показателя ошибки, то есть $E(x,y)$ действительно является показателем ошибки.

Как было доказано в работе [1] по показателю ошибки однозначно определяется α-оператор. Проверим, что для любых $x', x'' \in X$, $x' \leq x''$ $\alpha(x', x'')$ является решением разностного уравнения (1). Тем самым, будет доказано, что функция $y = \alpha(x', x'')$ являетя α-оператором построенного показателя ошибки. Действительно,

$$E(x'', y) = x'' - \alpha(x', x''),$$
$$E(x', y) = \alpha^{-1}(\alpha(x', x'')| x') - \alpha(x', x'')),$$

тогда уравнение (1) эквивалентно

$$x'' - \alpha(x', x'') = \alpha^{-1}(\alpha(x', x'')| x') - \alpha(x', x'')),$$
$$x'' = \alpha^{-1}(\alpha(x', x'')| x'),$$

а это тождество.

Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

Теорема 3: *пусть* α: $X \times X \rightarrow Y$ *удовлетворяет условиям симметричности, среднего, строгой монотонности, квазинормальности с функцией* $\Phi(\bullet)$ *и условию краевой монотонности, тогда функция*

$$E(x, y) = \begin{cases} \Phi(x) - \Phi(y), & \text{если } y \leq x; \\ = \Phi(\alpha^{-1}(y|x)) - \Phi(y), & \text{если } y \in \Lambda(x); \\ = \Phi(\sup X) - \Phi(\sup \Lambda(x)), & \text{если } y \notin \Lambda(x),\ y > x; \end{cases}$$

является показателем ошибки, причем фкнкция $\alpha(x', x'')$ *является его* α-*оператором.*

Доказательство: доказательство этой теоремы, совершенно, аналогично доказательству предыдущей теоремы, так как функция $\Phi(\bullet)$ является гомеоморфизмом множеств X и $\Phi(X)$ и естественный линейный порядок на $\Phi(X)$ совпадает с линейным порядком, индуцируемым отображением $\Phi(\bullet)$.

Список литературы.

1. Сидельников Ю.В. Теория и организация экспертного прогнозирования.- М.: ГПСИ ИМЭМО АН СССР, 1990.
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа.- М.: Наука 1989.