Верификация прогнозов. Близость и порядки

А. В. Буздалин

Содержание

Введение

1. **Понятие близости, как бинарное отношение**
   1.1. Системы предпочтений. 1.2. Двухсторонняя близость. 1.3.Односторонняя близость.
2. **Порядки индуцируемые системами предпочтений**
   2.1. Прямые порядки. 2.2. Сопряженные порядки.
3. **Отношения и показатели близости**
   3.1. Односторонние отношения близости. 3.2. Двухсторонние отношения близости. 3.3. Отношения близости и показатели ошибок.

Заключение

Литература

Введение

-Разве это сад? Видала я такие сады, рядом с которыми этот - просто заброшенный пустырь!...
-Разве это чепуха? - сказала Королева и затрясла головой. - Слыхала я такую чепуху, рядом с которой эта разумна, как толковый словарь!...

Льюис Кэрролл.

Неотъемлемой составляющей апостериорной оценки качества экспертного прогноза является его точность. Этот параметр представляет собой ключевое звено в процессе повышения качества прогноза. Чтобы дать заключение относительно оценки качества прогноза, нам, по крайней мере, необходимо иметь три оценки: нашу, истинное значение искомого параметра исследуемого объекта и ту экспертную оценку, с которой мы будем сравнивать взятую нами. Сопоставляя с истиной две экспертные оценки, мы ставим задачу выяснить, какая из них лучше (точнее).

Будем говорить, что первая экспертная оценка лежит ближе к истине, чем вторая, если первая оценка лучше второй. Тем самым, решение поставленной задачи будет заключаться в задании понятия близости между элементами множеств допустимых экспертных оценок $(\mathbf{X})$ и допустимых истинных значений оцениваемого параметра $(\mathbf{Y})$.

Данная работа посвящена изучению проблемы задания характеристик близости между элементами x, y некоторых множеств $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ соответственно.

Предлагается в качестве характеристики близости брать действительнозначную неотрицательную функцию $E: \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{R}_+$, принимающую нулевые значения тогда и только тогда, когда аргументы функции совпадают; или специфическое бинарное отношение $\leq^{\mathbf{T}}$ на множестве $\mathbf{T} = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, что является обобщением предыдущего способа задания близости (глава 1).

Проблема ставится в максимально широком смысле. Ищется ответ на вопрос, в каком смысле некоторая функция $E(x, y)$ (бинарное отношение $\leq^{\mathbf{T}}$) является характеристикой близости (главы 2, 3).

Полученные результаты дают один из возможных ответов на данный вопрос и позволяют ставить новые вопросы, требующие дальнейшего изучения.

22.11.96

1. Понятие близости, как бинарное отношение

-Выпей еще чаю, - сказал Мартовский Заяц, наклонясь к Алисе.
-Еще? - переспросила Алиса с обидой. - Я пока ничего не пила.
-Больше чаю она не желает, - произнес Мартовский Заяц в пространство.
-Ты, верно, хочешь сказать, что меньше чаю она не желает: гораздо легче выпить больше, а не меньше, чем ничего, - сказал Болванщик...

Льюис Кэрролл

1.1. Системы предпочтений.

Что стоит понимать под близостью или под расстоянием между двумя точками x, y, где x принадлежит некоторому множеству $\mathbf{X}$, а y принадлежит некоторому множеству $\mathbf{Y}$ $\left(x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}\right)$? В данной главе будут изложены основы возможного подхода к решению данной задачи.

Часто близость двух точек задают с помощью действительнозначной неотрицательной функции $E: \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{R}_+$, и говорят, что точка $x' \in \mathbf{X}$ ближе к точке $y \in \mathbf{Y}$, чем $x'' \in \mathbf{X}$, тогда и только тогда, когда $E(x', y) \le E(x'', y)$; а точка $y' \in \mathbf{Y}$ ближе к точке $x \in \mathbf{X}$, чем $y'' \in \mathbf{Y}$, тогда и только тогда, когда $E(x, y') \le E(x, y'')$.

Тем самым задается система предпочтений $g = \{g_y\}_{y \in \mathbf{Y}}$ на множестве $\mathbf{X}$ и система предпочтений $b = \{b_x\}_{x \in \mathbf{X}}$ на множестве $\mathbf{Y}$, что $x' g_y x''$ тогда и только тогда, когда точка $x' \in \mathbf{X}$ ближе к точке $y \in \mathbf{Y}$, чем $x'' \in \mathbf{X}$; а $y' b_x y''$ тогда и только тогда, когда точка $y' \in \mathbf{Y}$ ближе к точке $x \in \mathbf{X}$, чем $y'' \in \mathbf{Y}$. Так заданные предпочтения будут являться *квазипорядками*, то есть они удовлетворяют аксиомам:

1) $x g_y x, \quad y b_x y \quad \forall\, x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}$ (рефлексивность);
2) $x' g_y x'', x'' g_y x''' \Rightarrow x' g_y x''', \quad x', x'', x''' \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}$

   $y' b_x y''\ y'' b_x y''' \Rightarrow y' b_x y''', \quad y', y'', y''' \in \mathbf{Y}, x \in \mathbf{X}$ (транзитивность).

Имеет смысл абстрагироваться от функции $E(x, y)$ и изначально считать, что близость задается или одной совокупностью квазипорядков $g = \{g_y\}_{y \in \mathbf{Y}}$, или двумя совокупностями квазипорядков $g = \{g_y\}_{y \in \mathbf{Y}}$ и $b = \{b_x\}_{x \in \mathbf{X}}$. В первом случае близость будем называть *односторонней*, а во втором - *двухсторонней*.

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, данное множество, вообще говоря, не пусто. Естественно считать, что квазипорядки g, b обладают следующими свойствами *финитности*:

$(\mathsf{F}) \qquad \forall\, g \in \mathbf{G} \quad x g_g g \Leftrightarrow x = g$;

$(\mathsf{F})^* \qquad \forall\, g \in \mathbf{G} \quad y b_g g \Leftrightarrow y = g$.

1.2. Двухсторонняя близость.

Пусть $\mathbf{T} = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, $\mathbf{T}_y = \{(x, y): x \in \mathbf{X}\}$, $\mathbf{T}_x = \{(x, y): y \in \mathbf{Y}\}$, будем обозначать через $\le^{\mathbf{T}}$ или ${}^2\!\le^{\mathbf{T}}$ произвольное бинарное отношение на $\mathbf{T}$, обладающее свойствами:

1) рефлексивности;
2) транзитивности на множествах $\mathbf{T}_x, \mathbf{T}_y \quad \forall\, x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}$.

Будем говорить, что отношение $\le^{\mathbf{T}}$ *задает предпочтения* $g = \{g_y\}_{y \in \mathbf{Y}}$ и $b = \{b_x\}_{x \in \mathbf{X}}$, если

$$(x', y) \le^{\mathbf{T}} (x'', y) \Leftrightarrow x' g_y x'', \ (x, y') \le^{\mathbf{T}} (x, y'') \Leftrightarrow y' b_x y''.$$

Будем называть g прямой совокупностью предпочтений, а b - сопряженной $\left(b = g^*\right)$ относительно отношения $\le^{\mathbf{T}}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если отношение $\le^{\mathbf{T}}$ задает предпочтения $g = \{g_y\}_{y \in \mathbf{Y}}$ и $b = \{b_x\}_{x \in \mathbf{X}}$, то g, b квазипорядки.

Доказательство. Отношение $\le^{\mathbf{T}}$ рефлексивно, следовательно, для любых $x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}$ $(x, y) \le^{\mathbf{T}} (x, y)$, из чего вытекает, что $y b_x y$ и $x g_y x$, то есть предпочтения g, b рефлексивны.

Пусть $x' g_y x'', x'' g_y x'''$, где $x', x'', x''' \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}$, тогда $(x', y) \le^{\mathbf{T}} (x'', y)$ и $(x'', y) \le^{\mathbf{T}} (x''', y)$, но отношение $\le^{\mathbf{T}}$ транзитивно на множестве $\mathbf{T}_y$, следовательно, $(x', y) \le^{\mathbf{T}} (x''', y)$, то есть $x' g_y x'''$. Таким образом, отношение g транзитивно. Аналогично доказывается, что и отношение b транзитивно. Рефлексивность и транзитивность отношений g, b означает что они являются квазипорядками. □

Доказанная теорема утверждает, что любое бинарное отношение $\le^{\mathbf{T}}$ задает пару совокупностей квазипорядков g, b. Верно и обратное утверждение. Пусть g, b совокупности квазипорядков, будем говорить, что пара g, b *задает отношение* $\le^{\mathbf{T}}_{g\,b}$ на множестве $\mathbf{T}$, если

$$(x', y') \le^{\mathbf{T}}_{g\,b} (x'', y'') \quad \Leftrightarrow \quad x' g_{y'} x'', \quad y' b_{x''} y'', \text{ где } (x', y'), (x'', y'') \in \mathbf{T}.$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. Отношение $\le^{\mathbf{T}}_{g\,b}$ является некоторым отношением $\le^{\mathbf{T}}$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}$, отношения g, b рефлексивны, следовательно, $x g_y x$ и $y b_x y$, то есть $(x, y) \le^{\mathbf{T}}_{g\,b} (x, y)$, таким образом, отношение $\le^{\mathbf{T}}_{g\,b}$ рефлексивно.

Пусть $(x', y) \le^{\mathbf{T}}_{g\,b} (x'', y)$, $(x'', y) \le^{\mathbf{T}}_{g\,b} (x''', y)$, где $x', x'', x''' \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}$, значит $x' g_y x''$, $x'' g_{y'} x'''$, $y b_{x'''} y$, из транзитивности отношения g_y получаем, что $x' g_y x'''$, следовательно, $(x', y) \le^{\mathbf{T}}_{g\,b} (x''', y)$. Таким образом. отношение $\le^{\mathbf{T}}_{g\,b}$ транзитивно на множествах $\mathbf{T}_y$. Аналогично доказывается транзитивность отношения $\le^{\mathbf{T}}_{g\,b}$ на множествах $\mathbf{T}_x$.

□

Теорема 3. Отношение $\le^{\mathbf{T}}_{g\,b}$ задает предпочтения g, b.

Доказательство. Пусть $x', x'', x \in \mathbf{X},\ y', y'', y \in \mathbf{Y}$. Из определения отношения $\le^{\mathbf{T}}_{g\,b}$ имеем:

$$(x', y) \le^{\mathbf{T}}_{g\,b} (x'', y) \Leftrightarrow x' g_y x'', y b_{x''} y,\ (x, y') \le^{\mathbf{T}}_{g\,b} (x, y'') \Leftrightarrow y' b_x y'', x g_{y'} x.$$

Но отношения g, b рефлексивны, следовательно, всегда $x g_{y'} x$ и $y b_{x''} y$. Значит

$$(x', y) \le^{\mathbf{T}} (x'', y) \Leftrightarrow x' g_y x'',\ (x, y') \le^{\mathbf{T}} (x, y'') \Leftrightarrow y' b_x y''.$$

То есть отношение $\le^{\mathbf{T}}_{g\,b}$ задает предпочтения g, b.

□

Будем говорить, что отношение $\le^{\mathbf{T}}$ обладает свойством *финитности*, если оно удовлетворяет условию

$$(\mathrm{F}) \qquad \forall\, g \in \mathbf{G} \qquad (x, g) \le^{\mathbf{T}} (g, g) \Leftrightarrow x = g; \quad (g, y) \le^{\mathbf{T}} (g, g) \Leftrightarrow y = g.$$

Следующая теорема связывает свойство финитности для отношения $\le^{\mathbf{T}}$ со свойствами финитности задаваемых им предпочтений g, b.

Теорема 4. $(\mathrm{F}) \Leftrightarrow (\mathbf{F}), (\mathbf{F})^*$.

Доказательство. Отношение $\le^{\mathbf{T}}$ задает предпочтения g, b, следовательно,

$$(x, g) \le^{\mathbf{T}} (g, g) \Leftrightarrow x g_g g,\ (g, y) \le^{\mathbf{T}} (g, g) \Leftrightarrow y b_g g.$$

Таким образом, $x = g \Leftrightarrow x g_g g, \quad y = g \Leftrightarrow y b_g g$. Значит $(\mathrm{F}) \Leftrightarrow (\mathbf{F}), (\mathbf{F})^*$.

□

Будем говорить, что отношения g, b удовлетворяют условию *изотонности* $(\mathbf{E})$, если

$(\mathbf{E}) \qquad \exists\, E : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{R}_+$, что

- $E(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $x' g_y x'' \Leftrightarrow E(x', y) \le E(x'', y)$;
- $y' b_x y'' \Leftrightarrow E(x, y') \le E(x, y'')$.

Будем говорить, что отношение $\le^{\mathbf{T}}$ удовлетворяет условию *изотонности* $(\mathbf{E})$, если задаваемые им предпочтения g, b удовлетворяют условию изотонности. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. $(\mathbf{E}) \Rightarrow (\mathrm{F})$.

Доказательство. Из доказательства предыдущей теоремы видно, что условие (F) равносильно условиям

$$x = g \Leftrightarrow x\, g_{\,g}\, g, \quad g \in \mathbf{G}, \quad y = g \Leftrightarrow y\, b_{\,g}\, g, \quad g \in \mathbf{G}.$$

Из условия получаем, что

$$x = g \Leftrightarrow E(x,g) = 0 = E(g,g) \Leftrightarrow x\, g_{\,g}\, g, \quad g \in \mathbf{G},$$
$$y = g \Leftrightarrow E(g,y) = 0 = E(g,g) \Leftrightarrow y\, b_{\,g}\, g, \quad g \in \mathbf{G}.$$

Значит $(\mathbf{E}) \Rightarrow (\mathrm{F})$.

□

Пусть выполняется условие $(\mathbf{E})$, будем говорить, что отображение $E\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y} \to \mathbf{R}_+$ *задает отношение* $\le_{\mathring{A}}^{\mathbf{T}}$ на множестве $\mathbf{T}$, если $(x',y') \le_{\mathring{A}}^{\mathbf{T}} (x'',y'') \Leftrightarrow E(x',y') \le E(x'',y'')$.

Теорема 6. $\le_{\mathring{A}}^{\mathbf{T}}$ линейный квазипорядок.

Доказательство этой теоремы очевидно. Порядки $\le_{\mathring{A}}^{\mathbf{T}}$ и $\le_{g\,b}^{\mathbf{T}}$ связывает следующая теорема.

Теорема 7. Пусть справедливо $(\mathbf{E})$, тогда $\le_{g\,b}^{\mathbf{T}}$ вложено в $\le_{\mathring{A}}^{\mathbf{T}}$.

Доказательство. Пусть $(x',y') \le_{g\,b}^{\mathbf{T}} (x'',y'')$, значит $x'\, g_{\,y'}\, x''$, $\;y'\, b_{\,x''}\, y''$, из условия $(\mathbf{E})$ получаем, что $E(x',y') \le E(x'',y')$, $E(x'',y') \le E(x'',y'')$, следовательно, $E(x',y') \le E(x'',y'')$, а это означает, что $(x',y') \le_{\mathring{A}}^{\mathbf{T}} (x'',y'')$.

□

Следствие : отношение $\le_{\mathring{A}}^{\mathbf{T}}$ задает предпочтения g, b.

1.3. Односторонняя близость.

В случае односторонней близости существует только одна система предпочтений $g = \{g_{\,y}\}_{y\in\mathbf{Y}}$, однако, все конструкции предыдущего параграфа имеют соответствующие аналоги.

Будем обозначать через ${}^1{\le^{\mathbf{T}}}$ произвольное бинарное отношение на $\mathbf{T}$, обладающее свойствами:

1) рефлексивности;
2) транзитивности на множествах $\mathbf{T}_y \quad \forall\, y \in \mathbf{Y}$.

Будем говорить, что отношение ${}^1{\le^{\mathbf{T}}}$ *задает предпочтения* $g = \{g_{\,y}\}_{y\in\mathbf{Y}}$,если

$$(x',y) \le^{\mathbf{T}} (x'',y) \Leftrightarrow x'\, g_{\,y}\, x''.$$

Пусть g совокупность квазипорядков, будем говорить, что g *задает отношение* ${}^1{\le_g^{\mathbf{T}}}$ на множестве $\mathbf{T}$, если $(x',y')\ {}^1{\le_g^{\mathbf{T}}}\ (x'',y'') \;\Leftrightarrow\; x'\, g_{\,y'}\, x''$, где $(x',y'),(x'',y'') \in \mathbf{T}$. Будем говорить, что отношение ${}^1{\le^{\mathbf{T}}}$ обладает свойством *финитности*, если оно удовлетворяет условию

$$(\mathrm{F}) \qquad \forall\, g \in \mathbf{G} \qquad (x,g)\ {}^1{\le^{\mathbf{T}}}\ (g,g) \Leftrightarrow x = g.$$

Будем говорить, что отношения g удовлетворяют условию *изотонности* $(\mathbf{E})$, если

$(\mathbf{E}) \qquad \exists\, E\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y} \to \mathbf{R}_+$, что

- $E(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $x'\, g_{\,y}\, x'' \Leftrightarrow E(x',y) \le E(x'',y)$;

Будем говорить, что отношение ${}^1{\le^{\mathbf{T}}}$ удовлетворяет условию *изотонности* $(\mathbf{E})$, если задаваемые им предпочтения g удовлетворяют условию изотонности.

Пусть выполняется условие $(\mathbf{E})$, будем говорить, что отображение $E:\mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{R}_+$ *задает отношение* $\leq_{\mathcal{A}}^{\mathbf{T}}$ на множестве $\mathbf{T}$, если $(x',y')\leq_{\mathcal{A}}^{\mathbf{T}}(x'',y'')\Leftrightarrow E(x',y')\leq E(x'',y'')$.

Для так определенных понятий справедливы все теоремы аналогичные теоремам предыдущего параграфа.

Таким образом, полученные результаты позволяют говорить о том, что задание предпочтений g, b, в случае двухсторонней близости, с помощью отношений $\leq^{\mathbf{T}}$ и задание предпочтений g, в случае односторонней близости, с помощью отношений ${}^1\leq^{\mathbf{T}}$ является прямым обобщением задания предпочтений g, b отображениями $E:\mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{R}_+$. Понятно, что не каждое отображение $E(x,y)$, как и не каждые отношения $\leq^{\mathbf{T}}, {}^1\leq^{\mathbf{T}}$ могут задавать понятие близости двух точек x, y. Чтобы отношения $\leq^{\mathbf{T}}, {}^1\leq^{\mathbf{T}}$ были характеристиками близости точек x, y, на них должны быть наложены некоторые условие или должно быть оговорено в каком смысле отношения $\leq^{\mathbf{T}}, {}^1\leq^{\mathbf{T}}$ являются характеристиками близости. Это будет являться целью следующих глав.

2. Порядки индуцируемые системами предпочтений

В данной главе будет изложен понятийный аппарат, позволяющий судить о том, в каком смысле некоторые порядки $\leq^{\mathbf{T}}, {}^1\leq^{\mathbf{T}}$ является характеристикой близости.

2.1. Прямые порядки.

Пусть, как и раньше, $g=\{g_y\}_{y\in\mathbf{Y}}$ является системой предпочтений на множестве $\mathbf{X}$. Определим для каждой пары $x',x''\in\mathbf{X}$ следующие множества:

$$\mathbf{R}_{\leq}(x',x'')=\{y\in\mathbf{Y}|\quad x'g_y x''\},\ \mathbf{R}_{\geq}(x',x'')=\{y\in\mathbf{Y}|\quad x''g_y x'\},$$

$$\mathbf{R}_{<}(x',x'')=\mathbf{R}_{\leq}(x',x'')\setminus\mathbf{R}_{\geq}(x',x''),\ \mathbf{R}_{>}(x',x'')=\mathbf{R}_{\geq}(x',x'')\setminus\mathbf{R}_{\leq}(x',x''),$$

Для так определенных множеств справедлива следующая теорема.

Теорема 8. Верны следующие соотношения:

a) $\mathbf{R}_{\leq}(x',x'')=\mathbf{R}_{\geq}(x'',x')$;

b) $\mathbf{R}_{<}(x',x'')=\mathbf{R}_{>}(x'',x')$.

Доказательство теоремы очевидно.

Пусть $\mathbf{X}^2=\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}=\mathbf{X}^2\setminus\{(x,x)\}_{x\in\mathbf{X}}$, определим на множестве $\mathbf{Z}$ бинарное отношение $\leq^{\mathbf{Z}}$ следующим образом: $(x_1',x_1'')\leq^{\mathbf{Z}}(x_2',x_2'')\quad\Leftrightarrow\quad\mathbf{R}_{\leq}(x_1',x_1'')\subset\mathbf{R}_{\leq}(x_2',x_2'')$.

Теорема 9. отношение $\leq^{\mathbf{Z}}$ является частичным квазипорядком.

Доказательство. Отношение $\leq^{\mathbf{Z}}$, очевидно, рефлексивно. Проверим транзитивность. Пусть $(x_1',x_1'')\leq^{\mathbf{Z}}(x_2',x_2'')$ и $(x_2',x_2'')\leq^{\mathbf{Z}}(x_3',x_3'')$, тогда $\mathbf{R}_{\leq}(x_1',x_1'')\subset\mathbf{R}_{\leq}(x_2',x_2'')$ и $\mathbf{R}_{\leq}(x_2',x_2'')\subset\mathbf{R}_{\leq}(x_3',x_3'')$, следовательно, $\mathbf{R}_{\leq}(x_1',x_1'')\subset\mathbf{R}_{\leq}(x_3',x_3'')$, значит $(x_1',x_1'')\leq^{\mathbf{Z}}(x_3',x_3'')$.

□

Обозначим через Λ совокупность линейно квазиупорядоченных подмножеств множества $\mathbf{Z}$. Представим Λ, как $\Lambda=\{L_a\}_{a\in\mathbf{A}}$. Зададим на множестве $\mathbf{Y}$ совокупность бинарных отношений $\{<_a^{\mathbf{Y}}\}_{a\in\mathbf{A}}$, как $y_1<_a^{\mathbf{Y}}y_2\quad\Leftrightarrow\quad\exists(x',x'')\in L_a:\quad y_1\in\mathbf{R}_{\leq}(x',x''),y_2\in\overline{\mathbf{R}_{\leq}(x',x'')}$.

Для так заданных отношений $\{<_a^{\mathbf{Y}}\}_{a\in\mathbf{A}}$ верна следующая теорема.

Теорема 10. Отношения $\{<_a^{\mathbf{Y}}\}_{a\in\mathbf{A}}$ являются антирефлексивными и транзитивными.

Доказательство. Антирирефлексивность отношений $<_a^{\mathbf{Y}}$ заключается в том, что соотношение $y <_a^{\mathbf{Y}} y$ не имеет места ни для каких $y \in \mathbf{Y}$. Действительно, если $y <_a^{\mathbf{Y}} y$. то $\exists (x', x'') \in L_a : \quad y \in \mathbf{R}_{\leq}(x', x''), y \in \overline{\mathbf{R}_{\leq}(x', x'')}$, чего быть не может.

Проверим транзитивность отношений $<_a^{\mathbf{Y}}$. Пусть $y_1 <_a^{\mathbf{Y}} y_2, y_2 <_a^{\mathbf{Y}} y_3$. Это означает, что $\exists (x_1', x_1''), (x_2', x_2'') \in L_a : \quad y_1 \in \mathbf{R}_{\leq}(x_1', x_1''), \quad y_2 \in \overline{\mathbf{R}_{\leq}(x_1', x_1'')} \cap \mathbf{R}_{\leq}(x_2', x_2''), \quad y_3 \in \overline{\mathbf{R}_{\leq}(x_2', x_2'')}$. Возможны следующие случаи:

I. $\mathbf{R}_{\leq}(x_1', x_1'') \subset \mathbf{R}_{\leq}(x_2', x_2'')$. Значит $y_1 \in \mathbf{R}_{<}(x_2', x_2'')$ и $y_3 \in \overline{\mathbf{R}_{\leq}(x_2', x_2'')}$, то есть $y_1 <_a^{\mathbf{Y}} y_3$.

II. $\mathbf{R}_{\leq}(x_1', x_1'') \supset \mathbf{R}_{\leq}(x_2', x_2'')$. Значит

$$y_2 \in \overline{\mathbf{R}_{\leq}(x_1', x_1'')} \cap \mathbf{R}_{\leq}(x_2', x_2'') \subset \overline{\mathbf{R}_{\leq}(x_2', x_2'')} \cap \mathbf{R}_{\leq}(x_2', x_2'') = \varnothing,$$

следовательно этот случай невозможен.

Таким образом, $<_a^{\mathbf{Y}}$ антирефлексивны и транзитивны.

□

Зададим на множестве $\mathbf{Y}$ совокупность бинарных отношений $\{\leq_a^{\mathbf{Y}}\}_{a \in \mathbf{A}}$, как

$$y_1 \leq_a^{\mathbf{Y}} y_2 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 <_a^{\mathbf{Y}} y_2 \ \text{ или } \ y_1 = y_2 .$$

Для отношений $\{\leq_a^{\mathbf{Y}}\}_{a \in \mathbf{A}}$ верна следующая теорема.

Теорема 11. Отношения $\{\leq_a^{\mathbf{Y}}\}_{a \in \mathbf{A}}$ являются частичными порядками.

Доказательство. По предыдущей теореме отношения $<_a^{\mathbf{Y}}$ антирефлексивны и транзитивны, тогда $\{\leq_a^{\mathbf{Y}}\}_{a \in \mathbf{A}}$ являются частичными порядками (см. [1], гл.1, лемма 1). □

Будем говорить, что множество L_a *транзитивно*, если

$$(x_1, x_2), (x_2, x_3) \in L_a \quad \Rightarrow \quad (x_1, x_3) \in L_a .$$

Будем говорить, что множество L_a удовлетворяет условию $(\mathbf{V})$, если

$$(\mathbf{V}) \qquad (x_1, x_2), (x_2, x_3) \in L_a \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_{\leq}(x_1, x_2) \subset \mathbf{R}_{\leq}(x_2, x_3).$$

Верна следующая теорема.

Теорема 12. Если $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ и выполняется условие финитности (F), то для любого множества L_a выполняется условие $(\mathbf{V})$.

Доказательство. Доказательство теоремы будем вести от противного. Предположим, что для некоторого множества L_a условие $(\mathbf{V})$ не выполняется. Тогда $\exists (x_1, x_2), (x_2, x_3) \in L_a : \quad \mathbf{R}_{\leq}(x_1, x_2) \supset \mathbf{R}_{\leq}(x_2, x_3)$. $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ и выполняется условие (F), следовательно, $x_2 \in \mathbf{R}_{\leq}(x_2, x_3)$, значит, $x_2 \in \mathbf{R}_{\leq}(x_1, x_2)$. Применяя еще один раз условие (F), получаем что $x_2 = x_1$, но $(x_1, x_2) \in L_a$, следовательно, $x_2 \neq x_1$ - противоречие.

□

Пусть $\Lambda_0 = \{L_b\}_{b \in \mathbf{A}_0}$ - совокупность всевозможных транзитивных множеств L_a, удовлетворяющих условию $(\mathbf{V})$. Определим на множестве $\mathbf{X}$ совокупность бинарных отношений $\{<_b^{\mathbf{X}}\}_{b \in \mathbf{A}_0}$, как

$$x' <_b^{\mathbf{X}} x'' \quad \Leftrightarrow \quad (x', x'') \in L_b .$$

Для так определенных отношений $<_b^{\mathbf{X}}$ верна следующая теорема.

Теорема 13. Отношения $<_b^{\mathbf{X}}$ антирефлексивны и транзитивны.

Доказательство. Антирефлексивность отношений $<_b^{\mathbf{X}}$ очевидна, так как $L_a \subset \mathbf{Z} = \mathbf{X}^2 \setminus \{(x, x)\}_{x \in \mathbf{X}}$.

Транзитивность отношений $<_b^{\mathbf{X}}$ следует из транзитивности множеств L_b. □

Определим на множестве $\mathbf{X}$ совокупность бинарных отношений $\left\{\le_b^{\mathbf{X}}\right\}_{b\in\mathbf{A}_0}$, как

$$x' \le_b^{\mathbf{X}} x'' \quad\Leftrightarrow\quad x' <_b^{\mathbf{X}} x'' \text{ или } x' = x''.$$

Верны следующие теоремы.

Теорема 14. Отношения $\le_b^{\mathbf{X}}$ являются частичными порядками.

Доказательство. По предыдущей теореме отношения $<_b^{\mathbf{X}}$ антирефлексивны и транзитивны, тогда $\le_b^{\mathbf{X}}$ являются частичными порядками (см. [1], гл.1, лемма 1). □

Теорема 15. Пусть $x' <_b^{\mathbf{X}} x''$, $x' g_{y''} x''$ и не выполняется соотношение $y'' <_b^{\mathbf{Y}} y'$, тогда $x' g_{y'} x''$.

Доказательство. Предположим противное: $y' \in \overline{\mathbf{R}_{\le}(x',x'')}$. По предположению $x' <_b^{\mathbf{X}} x''$, следовательно, $(x',x'')\in L_b$. $y''\in\mathbf{R}_{\le}(x',x'')$, значит, $y'' <_b^{\mathbf{Y}} y'$, что противоречит предположению теоремы. □

Следствие. Пусть порядок $<_b^{\mathbf{Y}}$ вложен в некоторый порядок $<^{\mathbf{Y}}$. Тогда

$$x' <_b^{\mathbf{X}} x'', x' g_{y''} x'', \rceil y'' <^{\mathbf{Y}} y' \quad\Rightarrow\quad x' g_{y'} x''.$$

Определим для любого $y\in\mathbf{Y}$ следующие множества:

$$\mathbf{P}_{\le}^{b}(y) = \left\{x\in\mathbf{X} \middle| \quad y\in\overline{\mathbf{R}_{>}(x',x'')} \quad \forall\, x \le_b^{\mathbf{X}} x' <_b^{\mathbf{X}} x''\right\},$$

$$\mathbf{P}_{\ge}^{b}(y) = \left\{x\in\mathbf{X} \middle| \quad y\in\overline{\mathbf{R}_{<}(x',x'')} \quad \forall\, x' <_b^{\mathbf{X}} x'' \le_b^{\mathbf{X}} x\right\}.$$

Верна следующая теорема.

Теорема 16. Пусть $y\in\mathbf{Y}$, тогда

1) $\mathbf{P}_{\le}^{b}(y)\cup\mathbf{P}_{\ge}^{b}(y)=\mathbf{X}$;
2) если $x'\in\mathbf{P}_{\le}^{b}(y), x''\in\mathbf{P}_{\ge}^{b}(y)$ и $x'' <_b^{\mathbf{X}} x'$, то $x',x''\in\mathbf{P}_{\le}^{b}(y)\cap\mathbf{P}_{\ge}^{b}(y)$.

Доказательство. Будем доказывать теорему последовательно.

I. Предположим противное: $\exists\, x\notin\mathbf{P}_{\le}^{b}(y)\cup\mathbf{P}_{\le}^{b}(y)$. Это означает, что $\exists\, x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbf{X}$: $x_1 <_b^{\mathbf{X}} x_2 \le_b^{\mathbf{X}} x \le_b^{\mathbf{X}} x_3 <_b^{\mathbf{X}} x_4$, $y\in\mathbf{R}_{<}(x_1,x_2)\cap\mathbf{R}_{>}(x_3,x_4)$. Из условия $(\mathbf{V})$ следует, что $\mathbf{R}_{\le}(x_1,x_2)\subset\mathbf{R}_{\le}(x_3,x_4)$, значит, $\mathbf{R}_{<}(x_1,x_2)\subset\mathbf{R}_{\le}(x_3,x_4)$. Тогда $y\in\mathbf{R}_{\le}(x_3,x_4)\cap\mathbf{R}_{>}(x_3,x_4)=\varnothing$, противоречие. Таким образом, $\mathbf{P}_{\le}^{b}(y)\cup\mathbf{P}_{\ge}^{b}(y)=\mathbf{X}$.

II. Из определений множеств $\mathbf{P}_{\le}^{b}(y),\mathbf{P}_{\ge}^{b}(y)$, очевидно, следует, что

A. если $x'\in\mathbf{P}_{\le}^{b}(y)$ и $x'' <_b^{\mathbf{X}} x'$, то $x''\in\mathbf{P}_{\le}^{b}(y)$;

B. если $x''\in\mathbf{P}_{\ge}^{b}(y)$ и $x'' <_b^{\mathbf{X}} x'$, то $x'\in\mathbf{P}_{\ge}^{b}(y)$.

Откуда получаем, что $x',x''\in\mathbf{P}_{\le}^{b}(y)\cap\mathbf{P}_{\ge}^{b}(y)$.

Теорема доказана.

□

2.2. Сопряженные порядки.

Пусть, как и ранее, $b=g^{*}$ является сопряженной системой предпочтений относительно отношения $\le^{\mathbf{T}}$. Понятно, что все построения предыдущего параграфа можно проделать и для совокупности предпочтений b. Определим для каждой пары $y',y''\in\mathbf{Y}$ следующие множества:

$$\mathbf{R}_{\le}^{*}(y',y'')=\left\{x\in\mathbf{X}\middle| \quad y' b_x\, y''\right\},$$

$$\mathbf{R}_{\ge}^{*}(y',y'')=\left\{x\in\mathbf{X}\middle| \quad y'' b_x\, y'\right\},$$

$$\mathbf{R}_{<}^{*}(y',y'')=\mathbf{R}_{\le}^{*}(y',y'')\setminus\mathbf{R}_{\ge}^{*}(y',y''),$$

$$\mathbf{R}_{>}^{*}(y',y'')=\mathbf{R}_{\ge}^{*}(y',y'')\setminus\mathbf{R}_{\le}^{*}(y',y'').$$

Аналогично предыдущему параграфу можно определить совокупности сопряженных частичных порядков: $\left\{{}^{*}\!\le_h^{\mathbf{X}}\right\}_{h\in\mathbf{B}}$, $\left\{{}^{*}\!\le_m^{\mathbf{Y}}\right\}_{m\in\mathbf{B}_0}$, и множества:

$$^{*}\mathbf{P}_{\le}^{m}(x)=\left\{y\in\mathbf{Y}\middle|\quad x\in\overline{\mathbf{R}_{>}^{*}(y',y'')}\quad\forall\, y\ {}^{*}\!\le_{m}^{\mathbf{Y}} y'\ {}^{*}\!<_{m}^{\mathbf{Y}} y''\right\},$$

$$^{*}\mathbf{P}_{\ge}^{m}(x)=\left\{y\in\mathbf{Y}\middle|\quad x\in\overline{\mathbf{R}_{<}^{*}(y',y'')}\quad\forall\, y'\ {}^{*}\!<_{m}^{\mathbf{Y}} y''\ {}^{*}\!\le_{m}^{\mathbf{Y}} y\right\}.$$

Будут верны следующие теоремы.

Теорема 17. Пусть $y'\ {}^{*}\!<_{m}^{\mathbf{Y}} y''$, $y'\,b_{x''}y''$ и не выполняется соотношение $x''\ {}^{*}\!<_{m}^{\mathbf{X}} x'$, тогда $y'\,b_{x'}y''$.

Следствие. Пусть ${}^{*}\!<_{h}^{\mathbf{X}}$ вложен в некоторый порядок ${}^{*}\!<^{\mathbf{X}}$. Тогда

$$y'\ {}^{*}\!<_{m}^{\mathbf{Y}} y'',\ y'\,b_{x''}y'',\ \rceil\, x''\ {}^{*}\!<^{\mathbf{X}} x'\ \Rightarrow\ y'\,b_{x'}y''.$$

Теорема 18. Пусть $x\in\mathbf{X}$, тогда

1) ${}^{*}\mathbf{P}_{\le}^{m}(x)\cup{}^{*}\mathbf{P}_{\ge}^{m}(x)=\mathbf{Y}$;

2) если $y'\in{}^{*}\mathbf{P}_{\le}^{m}(x), y''\in{}^{*}\mathbf{P}_{\ge}^{m}(x)$ и $y''\ {}^{*}\!<_{m}^{\mathbf{Y}} y'$, то $y',y''\in{}^{*}\mathbf{P}_{\le}^{m}(x)\cap{}^{*}\mathbf{P}_{\ge}^{m}(x)$.

3. Отношения и показатели близости

3.1. Односторонние отношения близости.

Начнем данную главу с определения того, что является характеристикой односторонней близости. Пусть $\le^{\mathbf{X}},\le^{\mathbf{Y}}$ частичные порядки на множествах $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ соответственно.

Определение 1. Отношение ${}^{1}\!\le^{\mathbf{T}}$ будем называть *одностороним отношением близости* на порядках $\le^{\mathbf{X}},\le^{\mathbf{Y}}$, если

1) ${}^{1}\!\le^{\mathbf{T}}$ удовлетворяет условию финитности (F);

2) $x'<^{\mathbf{X}} x'', \rceil y''<^{\mathbf{Y}} y', (x',y'')\ {}^{1}\!\le^{\mathbf{T}} (x'',y'')\ \Rightarrow\ (x',y')\ {}^{1}\!\le^{\mathbf{T}} (x'',y')$;

3) $x'<^{\mathbf{X}} x'', x''<^{\mathbf{X}} x''', (x',y)\ {}^{1}\!\le^{\mathbf{T}} (x'',y)\ \Rightarrow\ (x'',y)\ {}^{1}\!\le^{\mathbf{T}} (x''',y)$.

Определение 2. Действительнозначную неотрицательную функцию $E:\mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{R}_{+}$ будем называть *односторонним показателем близости* на порядках $\le^{\mathbf{X}},\le^{\mathbf{Y}}$, если

1) $E(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

2) задаваемое функцией $E(x,y)$ отношение $\le_{\acute{A}}^{\mathbf{T}}$ является односторонним отношением близости.

Очевидно, что понятие отношения близости является прямым обобщением понятия показателя близости. Из следствия к теореме 15 следует, что любое отношение ${}^{1}\!\le^{\mathbf{T}}$, удовлетворяющее условию финитности (F), является односторонним отношением близости на всех задаваемых им парах порядков $\left\{\left(\le_{b}^{\mathbf{X}},\le^{\mathbf{Y}}\right)\middle|\quad\left(\le_{b}^{\mathbf{Y}}\right)\subset\left(\le^{\mathbf{Y}}\right)\right\}_{b\in\mathbf{A}_0}$. Верно и обратное утверждение.

Теорема 19. Пусть ${}^{1}\!\le^{\mathbf{T}}$ является отношением близости на порядках $\le^{\mathbf{X}},\le^{\mathbf{Y}}$. Тогда существуют порядки $\le_{b}^{\mathbf{X}},\le_{b}^{\mathbf{Y}}$, что $\left(\le_{b}^{\mathbf{X}}\right)=\left(\le^{\mathbf{X}}\right)$ и $\left(\le_{b}^{\mathbf{Y}}\right)\subset\left(\le^{\mathbf{Y}}\right)$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{L}=\left\{(x',x'')\in\mathbf{Z}\middle|\quad x'\le^{\mathbf{X}} x''\right\}$, проверим, что множество $\mathbf{L}$ является линейно квазиупорядоченным множеством отношением $\le^{\mathbf{Z}}$. Предположим противное: $\exists\, y_1,y_2\in\mathbf{Y}$, $(x_1',x_1''),(x_2',x_2'')\in\mathbf{Z}$, что

$$y_1\in\mathbf{R}_{\le}(x_1',x_1''), y_1\in\overline{\mathbf{R}_{\le}(x_2',x_2'')}, y_2\in\mathbf{R}_{\le}(x_2',x_2''), y_2\in\overline{\mathbf{R}_{\le}(x_1',x_1'')}.$$

Из условия 2) для отношений близости и того, что $y_1\in\mathbf{R}_{\le}(x_1',x_1'')$, $y_2\in\overline{\mathbf{R}_{\le}(x_1',x_1'')}$, получаем: $y_1<^{\mathbf{Y}} y_2$. Из условия 2) для отношений близости и того, что $y_1\in\overline{\mathbf{R}_{\le}(x_2',x_2'')}$, $y_2\in\mathbf{R}_{\le}(x_2',x_2'')$, получаем: $y_2<^{\mathbf{Y}} y_1$, противоречие. Таким образом, $\mathbf{L}$ является линейно квазиупорядоченным множеством отношением $\le^{\mathbf{Z}}$. Тогда из транзитивности отношения $\le^{\mathbf{X}}$ и условия 3) для отношений близости получаем, что $\exists\, b\in\mathbf{A}_0:\ \ \mathbf{L}=L_b$, то есть $\left(\le_{b}^{\mathbf{X}}\right)=\left(\le^{\mathbf{X}}\right)$.

Проверим, что $\left(\le^{\mathbf{Y}}_{b}\right) \subset \left(\le^{\mathbf{Y}}\right)$. Пусть $y_1 <^{\mathbf{Y}}_{b} y_2$, это означает, что для некоторых $\left(x',x''\right) \in \mathbf{Z}$ $y_1 \in \mathbf{R}_{\le}\left(x',x''\right)$, $y_2 \in \overline{\mathbf{R}_{\le}\left(x',x''\right)}$, тогда из условия 2) для отношений близости получаем, что $y_1 <^{\mathbf{Y}} y_2$. □

Таким образом, множество пар порядков $\left\{\left(\le^{\mathbf{X}}_{b}, \le^{\mathbf{Y}}\right) \middle| \ \left(\le^{\mathbf{Y}}_{b}\right) \subset \left(\le^{\mathbf{Y}}\right)\right\}_{b \in \mathbf{A}_0}$ является всем множеством пар порядков $\le^{\mathbf{X}}, \le^{\mathbf{Y}}$, относительно которых финитное отношение ${}^{1}\!\le^{\mathbf{T}}$ является односторонним отношением близости, то есть верна следующая теорема.

Теорема 20. Отношение ${}^{1}\!\le^{\mathbf{T}}$, удовлетворяющее условию финитности (F), является односторонним отношением близости на порядках $\le^{\mathbf{X}}, \le^{\mathbf{Y}}$ тогда и только тогда, когда $\left(\le^{\mathbf{X}}, \le^{\mathbf{Y}}\right) \in \left\{\left(\le^{\mathbf{X}}_{b}, \le^{\mathbf{Y}}\right) \middle| \ \left(\le^{\mathbf{Y}}_{b}\right) \subset \left(\le^{\mathbf{Y}}\right)\right\}_{b \in \mathbf{A}_0}$.

Следствие. Пусть одностороннее отношение ${}^{1}\!\le^{\mathbf{T}}$ задает систему предпочтений g, тогда для любых $y \in \mathbf{Y}$ и $x \in \mathbf{X}$

1) $\mathbf{P}_{\le}(y) \cup \mathbf{P}_{\ge}(y) = \mathbf{X}$;

2) если $x' \in \mathbf{P}_{\le}(y), x'' \in \mathbf{P}_{\ge}(y)$ и $x'' <^{\mathbf{X}} x'$, то $x', x'' \in \mathbf{P}_{\le}(y) \cap \mathbf{P}_{\ge}(y)$;

где

$$\mathbf{P}_{\le}(y) = \left\{x \in \mathbf{X} \middle| \quad y \in \overline{\mathbf{R}_{>}\left(x',x''\right)} \quad \forall\, x \le^{\mathbf{X}} x' <^{\mathbf{X}} x''\right\},$$

$$\mathbf{P}_{\ge}(y) = \left\{x \in \mathbf{X} \middle| \quad y \in \overline{\mathbf{R}_{<}\left(x',x''\right)} \quad \forall\, x' <^{\mathbf{X}} x'' \le^{\mathbf{X}} x\right\}.$$

Реальный смысл так введенных понятий отношения и показателя близости будет пояснен в параграфе 3.3. на примере показателей ошибки.

3.2. Двухсторонние отношения близости.

Пусть $\le^{\mathbf{X}}, \le^{\mathbf{Y}}$ частичные порядки на множествах $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ соответственно. Дадим определения понятий, характеризующих двухстороннюю близость.

Определение 3. Отношение $\le^{\mathbf{T}}$ будем называть *двухсторонним отношением близости* на порядках $\le^{\mathbf{X}}, \le^{\mathbf{Y}}$, если

1) $\le^{\mathbf{T}}$ удовлетворяет условию финитности (F);

2) $x' <^{\mathbf{X}} x'', \rceil y'' <^{\mathbf{Y}} y', (x',y'') \le^{\mathbf{T}} (x'',y'') \quad \Rightarrow \quad (x',y') \le^{\mathbf{T}} (x'',y')$;

3) $x' <^{\mathbf{X}} x'', x'' <^{\mathbf{X}} x''', (x',y) \le^{\mathbf{T}} (x'',y) \quad \Rightarrow \quad (x'',y) \le^{\mathbf{T}} (x''',y)$;

4) $y' <^{\mathbf{Y}} y'', \rceil x'' <^{\mathbf{X}} x', (x'',y') \le^{\mathbf{T}} (x'',y'') \quad \Rightarrow \quad (x',y') \le^{\mathbf{T}} (x',y'')$

5) $y' <^{\mathbf{Y}} y''$, $y' <^{\mathbf{Y}} y'''$, $(x,y') \le^{\mathbf{T}} (x,y'') \quad \Rightarrow \quad (x,y'') \le^{\mathbf{T}} (x,y''')$.

Определение 4. Действительнозначную неотрицательную функцию $E: \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{R}_{+}$ будем называть *двухсторонним показателем близости* на порядках $\le^{\mathbf{X}}, \le^{\mathbf{Y}}$, если

1) $E(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) задаваемое функцией $E(x,y)$ отношение $\le^{\mathbf{T}}_{Å}$ является двухсторонним отношением близости.

Для двухсторонних отношений близости верна теорема аналогичная теореме 20.

Теорема 21. Отношение $\le^{\mathbf{T}}$, удовлетворяющее условию финитности (F), является двухсторонним отношением близости на порядках $\le^{\mathbf{X}}, \le^{\mathbf{Y}}$ тогда и только тогда, когда $\left(\le^{\mathbf{X}}, \le^{\mathbf{Y}}\right) \in \left\{\left(\le^{\mathbf{X}}_{b}, {}^{*}\!\le^{\mathbf{Y}}_{m}\right) \middle| \ \left(\le^{\mathbf{Y}}_{b}\right) \subset \left({}^{*}\!\le^{\mathbf{Y}}_{m}\right), \left({}^{*}\!\le^{\mathbf{Y}}_{m}\right) \subset \left(\le^{\mathbf{X}}_{b}\right)\right\}_{b \in \mathbf{A}_0,\, m \in \mathbf{B}_0}$.

Доказательство. Двухсторонние отношение близости $\le^{\mathbf{T}}$, очевидно будет являться и односторонним отношением близости, следовательно, $\left(\le^{\mathbf{X}}, \le^{\mathbf{Y}}\right) \in \left\{\left(\le^{\mathbf{X}}_{b}, \le^{\mathbf{Y}}\right) \middle| \ \left(\le^{\mathbf{Y}}_{b}\right) \subset \left(\le^{\mathbf{Y}}\right)\right\}_{b \in \mathbf{A}_0}$.

Систему предпочтений b можно рассматривать, как одностороннюю характеристику близости на множествах $\mathbf{X}' = \mathbf{Y}, \mathbf{Y}' = \mathbf{X}$, тогда и в этом смысле отношение $\leq^{\mathbf{T}}$ будет являться односторонним отношением близости, следовательно,

$$\left(\leq^{\mathbf{X}}, \leq^{\mathbf{Y}}\right) \in \left\{\left(\leq^{\mathbf{X}}, {}^{*}\!\leq^{\mathbf{Y}}_{m}\right) \middle| \quad \left({}^{*}\!\leq^{\mathbf{Y}}_{m}\right) \subset \left(\leq^{\mathbf{X}}\right)\right\}_{m \in \mathbf{B}_0}.$$

Значит, $\left(\leq^{\mathbf{X}}, \leq^{\mathbf{Y}}\right) \in \left\{\left(\leq^{\mathbf{X}}_{b}, {}^{*}\!\leq^{\mathbf{Y}}_{m}\right) \middle| \quad \left(\leq^{\mathbf{Y}}_{b}\right) \subset \left({}^{*}\!\leq^{\mathbf{Y}}_{m}\right), \left({}^{*}\!\leq^{\mathbf{Y}}_{m}\right) \subset \left(\leq^{\mathbf{X}}_{b}\right)\right\}_{b \in \mathbf{A}_0, m \in \mathbf{B}_0}$.

□

Следствие. Пусть двухстороннее отношение $\leq^{\mathbf{T}}$ задает системы предпочтений g, b, тогда для любых $y \in \mathbf{Y}$ и $x \in \mathbf{X}$

1) $\mathbf{P}_{\leq}(y) \cup \mathbf{P}_{\geq}(y) = \mathbf{X}$;
2) если $x' \in \mathbf{P}_{\leq}(y), x'' \in \mathbf{P}_{\geq}(y)$ и $x'' <^{\mathbf{X}} x'$, то $x', x'' \in \mathbf{P}_{\leq}(y) \cap \mathbf{P}_{\geq}(y)$;
3) ${}^{*}\mathbf{P}_{\leq}(x) \cup {}^{*}\mathbf{P}_{\geq}(x) = \mathbf{Y}$;
4) если $y' \in {}^{*}\mathbf{P}_{\leq}(x), y'' \in {}^{*}\mathbf{P}_{\geq}(x)$ и $y'' <^{\mathbf{Y}} y'$, то $y', y'' \in {}^{*}\mathbf{P}_{\leq}(x) \cap {}^{*}\mathbf{P}_{\geq}(x)$;

где

$$\mathbf{P}_{\leq}(y) = \left\{x \in \mathbf{X} \middle| \quad y \in \overline{\mathbf{R}_{>}(x', x'')} \quad \forall\, x \leq^{\mathbf{X}} x' <^{\mathbf{X}} x''\right\},$$

$$\mathbf{P}_{\geq}(y) = \left\{x \in \mathbf{X} \middle| \quad y \in \overline{\mathbf{R}_{<}(x', x'')} \quad \forall\, x' <^{\mathbf{X}} x'' \leq^{\mathbf{X}} x\right\},$$

$${}^{*}\mathbf{P}_{\leq}(x) = \left\{y \in \mathbf{Y} \middle| \quad x \in \overline{\mathbf{R}^{*}_{>}(y', y'')} \quad \forall\, y \leq^{\mathbf{Y}} y' <^{\mathbf{Y}} y''\right\},$$

$${}^{*}\mathbf{P}_{\geq}(x) = \left\{y \in \mathbf{Y} \middle| \quad x \in \overline{\mathbf{R}^{*}_{<}(y', y'')} \quad \forall\, y' <^{\mathbf{Y}} y'' \leq^{\mathbf{Y}} y\right\}.$$

3.3. Отношения близости и показатели ошибок.

Смысл введенных выше понятий отношений и показателей близости лучше всего пояснить на примере показателей ошибок. Основы теории показателей ошибок были изложены в работе [2].

Под показателем ошибок понимается действительнозначная функция $E(x, y)$, где x принадлежит множеству возможных экспертных оценок $\mathbf{X}$, y принадлежит множеству возможных экспертных оценок $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$ Í $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}$ линейно упорядоченное множество отношением "£", $\mathbf{X}$ связанное множество в топологии индуцируемой линейным порядком "£". Функция $E(x, y)$ должна удовлетворять пяти аксиомам:

1) $E(x, y) = \mathbf{0}$ Û $x = y$;
2) $E(x, y)$ ³ $\mathbf{0}$;
3) при любом фиксированном x функция $E(x, y)$ строго монотонно убывает на луче $\{y$ Î $\mathbf{Y}: \ y < x\}$ и монотонно возрастает на луче $\{y$ Î $\mathbf{Y}: \ y > x\}$;
4) при любом фиксированном y функция $E(x, y)$ строго монотонно убывает на луче $\{x$ Î $\mathbf{X}: \ x < y\}$ и строго монотонно возрастает на луче $\{x$ Î $\mathbf{X}: \ x > y\}$;
5) $E(x, y)$ непрерывна по y.

Можно доказать, что любой показатель ошибок является двухсторонним показателем близости. Таким образом, понятие показателя близости, а следовательно, и понятие отношения близости, включают в себя понятие показателя ошибок. С другой стороны, для любого двухстороннего отношения близости выполняется утверждение следствия к теореме 21, что является обобщением требований аксиом 3), 4) показателя ошибок.

Действительно, утверждение следствия можно переформировать следующим образом:

1) при любом фиксированном x существует $x_0 \in \mathbf{X}$, что функция $E(x, y)$ монотонно убывает на луче $\{y \in \mathbf{Y}: \ y < x_0\}$ и монотонно возрастает на луче $\{y \in \mathbf{Y}: \ y > x_0\}$;
2) при любом фиксированном y существует $y_0 \in \mathbf{Y}$ функция $E(x, y)$ монотонно убывает на луче $\{x \in \mathbf{X}: \ x < y_0\}$ и монотонно возрастает на луче $\{x \in \mathbf{X}: \ x > y_0\}$.

Тем самым, понятие отношения близости, естественным образом, согласуется с понятием показателей ошибок.

Заключение

Подведем некоторые итоги. Введенные понятия одностороннего и двухстороннего отношений близости являются прямым обобщением понятий показателей близости, где в качестве характеристики близости рассматривается действительнозначная неотрицательная функция $E(x,y)$, принимающая нулевые значения, тогда и только тогда, когда аргументы функции совпадают. Из сопоставления понятий показателей близости и ошибок следует, что показатели близости действительно являются характеристиками близости.

Вместе с тем, введенные понятия позволяют увидеть, в каком смысле произвольная функция $E(x,y)$ или, в более общем случае, отношения $\leq^{\mathbf{T}}, {}^{1}\!\leq^{\mathbf{T}}$ являются характеристиками близости. Каждая функция $E(x,y)$ задает совокупность пар порядков $\left\{\left(\leq_b^{\mathbf{X}}, \leq^{\mathbf{Y}}\right) \middle| \ \left(\leq_b^{\mathbf{Y}}\right) \subset \left(\leq^{\mathbf{Y}}\right)\right\}_{b \in \mathbf{A}_0}$ $\left(\left\{\left(\leq_b^{\mathbf{X}}, {}^{*}\!\leq_m^{\mathbf{Y}}\right) \middle| \ \left(\leq_b^{\mathbf{Y}}\right) \subset \left({}^{*}\!\leq_m^{\mathbf{Y}}\right), \left({}^{*}\!\leq_m^{\mathbf{Y}}\right) \subset \left(\leq_b^{\mathbf{X}}\right)\right\}_{b \in \mathbf{A}_0,\, m \in \mathbf{B}_0} \right)$, относительно которых она является односторонним (двухсторонним) показателем близости. Более того, данные совокупности являются полными совокупностями пар порядков, относительно которых функция $E(x,y)$ будет показателем близости.

Литература

1. Биркгоф Г. Теория решеток. -М.: Наука, 1984.
2. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. -М.: Наука, 1974.
3. Сидельников Ю.В. Теория и организация экспертного прогнозирования - М.: ГПСИ ИМЭМО АН СССР, 1990.