Инвариантные методы многомерного статистического анализа

Буздалин Алексей Владимирович

Оглавление

Введение

Первым свидетелем оказался Болванщик...
-Прошу прощения, Ваше Величество, - начал он, - что я сюда явился с чашкой... Не успел кончить пить чай...
-Мог бы и успеть, - сказал Король. - Ты когда начал?...
-Четырнадцатого марта, кажется, - проговорил он.
-Пятнадцатого, - сказал Мартовский Заяц.
-Шестнадцатого, - пробормотала Соня.
-Запишите, - велел Король присяжным, и они быстро записали все три даты на грифельных досках, а потом сложили их и перевели в шиллинги и пенсы...

Льюис Кэролл

Задача исследования свойств многомерных распределений часто принципиально отличается от задачи изучения свойств одномерных распределений. Методы математической статистики, хорошо работающие на одномерных данных, перестают работать на многомерных из-за резкого возрастания необходимого числа производимых операций. Более того, существуют методы вообще не имеющие многомерных аналогов. Решение проблемы может заключаться в снижении размерности задачи, то есть в сведении изучения многомерных распределений к изучению одномерных. Стоит отметить, что задача не сводится просто к изучению, так называемых, маргинальных распределений (распределений координат случайного вектора), так как маргинальные распределения не задают общего распределения.

Для решения проблемы предлагается следующий подход. Строится некоторое специфическое отображение $\mathbf{R}^{\mathbf{k}}$ в $\mathbf{R}$, далее именуемое “базовым отображением”, изучаемый случайный вектор преобразуется с помощью базового отображения в одномерную случайную величину, по распределению которой можно однозначно восстановить отображаемое многомерное распределение. Тем самым, решается задача снижения размерности.

В первой главе дается определение базового отображения и изучаются основные его функциональные свойства, такие как: инъективность, измеримость, сохранение меры, измеримость обратного отображения и другие. Именно свойство измеримости позволяет переводить случайные вектора в одномерные случайные величины.

Во второй главе приводятся базисные результаты, связывающие многомерные и одномерные распределения. Доказывается, что базовое отображение задает инъекцию множества многомерных распределений в множество одномерных и биекцию множества многомерных абсолютно непрерывных распределений на множество одномерных абсолютно непрерывных распределений. Доказываются конкретные формулы, связывающие плотности и функции многомерных и одномерных абсолютно непрерывных распределений.

В третьей главе показаны некоторые применения предложенного подхода к изучению многомерных распределений. Удается построить многомерные аналоги критериев Колмогорова, Смирнова, а также критерий однородности двух процессов восстановлений, наблюдаемых на конечном интервале времени. Тем самым, базовое отображение может применяться при снижении размерности и бесконечномерных задач. Далее показано, как полученные результаты могут быть применены при моделировании случайных векторов и увеличении объемов датчиков случайных чисел, а также в методе Монте-Карло. Доказаны теоремы, связывающии метрики на многомерных и одномерных распределениях.

Анализируя совокупность результатов, полученных при применении предлагаемого принципа снижения размерности задачи изучения многомерных распределений, можно с уверенностью сказать, что предложенный подход достаточно перспективен и требует дальнейшего изучения.

15.07.96

1. Функциональные свойства базового отображения.

В первой главе будут даны определения базового отображения и отображения обратного к базовому, а также исследованы основные функциональные свойства этих отображений.

1.1. Определение базового отображения.

Сначала построим отображение f , действующее из к-мерного куба $[0,1]^k$ в отрезок [0,1] ($f:[0,1]^k \to [0,1]$).

Пусть вектор $a=(a^1,\ldots,a^k)\in [0,1]^k$ и $a^i=0,a_1^i a_2^i a_3^i\ldots$ десятичное представление чисел , $i=1,\ldots,k$. Положим по определению

$$f(a)=o,a_1^1a_1^2\ldots a_1^k a_2^1 a_2^2\ldots a_2^k a_3^1 a_3^2\ldots a_3^k\ldots$$

Если число a^i можно представить в виде $\frac{p}{10^q}$, где p,q∈ N , то оно имеет два десятичных представления, одно с нулем в периоде, другое с девяткой в периоде. Для однозначного определения отображений условимся брать представления с девяткой в периоде. То есть

$$f\left(\frac{1}{2},0\right)=0{,}409090909\ldots,$$

где $f:[0,1]^2 \to [0,1]$. Причина данного выбора станет понятна из дальнейшего изучения свойств базового отображения.

Зададим теперь отображение на всем пространстве $\mathbf{R}^k$. Пространство $\mathbf{R}^k$ можно представить в виде счетного объединения квадратов вида

$$[m^1,m^1+1]\times\ldots\times[m^k,m^k+1],$$

где $m^i\in Z, i=1,\ldots,k$. Пусть [n,n+1], $n\in N$, некоторый отрезок числовой прямой **R,** зададим отображение f на $[m^1,m^1+1]\times\ldots\times[m^k,m^k+1]$ в $[n,n+1]$ по формуле

$$f(a)=f(a-m)+n,$$

где $a=(a^1,\ldots,a^k)\in[m^1,m^1+1]\times\ldots\times[m^k,m^k+1]$, $m=(m^1,\ldots,m^k)$. Так как существует взаимнооднозначное соответствие между всеми квадратами вида $[m^1,m^1+1]\times\ldots\times[m^k,m^k+1]$ и всеми отрезками $[n,n+1]$, то тем самым, мы задали отображение на всем пространстве $\mathbf{R}^k$.

Особой чертой вышеопределенного базового отображения является инъективность, то есть отображение переводит различные вектора в различные точки действительной прямой. Данное свойство легко следует из определения отображения.

Замечание: Для простоты, в дальнейшем будем рассматривать отображение f из $\mathbf{R}^2$ в **R**. Для общего случая все последующие утверждения доказываются совершенно аналогично. Так как отображение f строится на базе отображения, действующего из $[0,1]^2$ в [0,1], то более того, часто доказательства теорем будем вести в предположении, что f действует из $[0,1]^2$ в [0,1].

1.2. Измеримость образа базового отображения.

Теорема 1: $f\left(R^k\right)$ борелевское множество и мера Лебега множества $R\setminus f\left(\mathrm{R}^k\right)$ равна нулю ($\mu\left(R\setminus f\left(\mathrm{R}^k\right)\right)=0$).

Доказательство: пусть $A=f\left(\left[0,1\right]^2\right), \overline{A}=\left[0,1\right]\setminus A$,тогда, учитывая замечание п.1.1., докажем, что A , борелевское множество и $\mu(\overline{A})=0$.

Нетрудно заметить, что

$$\overline{A}=\left\{x\in\left[0,1\right] \mid \exists N_0\in N: x_{N_0+2n}=0\,\forall n\in N, x\neq\frac{p}{10^q}\right\},$$

где x имеет десятичное представление $x=0,x_1x_2x_3x_4x_5\ldots$.

Множество $\overline{A}$ можно разбить на два подмножества C_1, C_2, где

$$C_1=\left\{x\in\overline{A}: N_0=2n, n\in\mathrm{N}\right\},$$

$$C_2=\left\{x\in\overline{A}: N_0=2n-1, n\in\mathrm{N}\right\},$$

$$\overline{A}=C_1\cup C_2.$$

Пусть

$$C_1^0=\left\{c=0,c_1 0c_3 0c_5\ldots \mid c_i\in\left\{0,1,\ldots,9\right\}\right\},$$

$$C_2^0=\left\{c=0,0c_2 0c_4 0\ldots \mid c_i\in\left\{0,1,\ldots,9\right\}\right\}.$$

Нетрудно заметить, что множество C_1 можно представить в виде счетного объединения следующего вида

$$C_1=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{y_n+c \mid c\in C_1^0\right\},\quad y_n\in Q,$$

где y_n имеет вид

$$y_n=0,0y_n^2 0y_n^4 0\ldots 0y_n^{N_0}000\ldots.$$

По аналогии множество C_1 представляется как

$$C_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ z_n + c \mid c \in C_2^0 \}, \quad z_n \in Q$$
.

Докажем что C_1^0, C_2^0 являются борелевскими множествами нулевой меры.

Нетрудно заметить, что

$$C_1^0 \subset \bigcup_{k=1}^{10^N} \left[\tilde{c}_k^N, \tilde{c}_k^N + \delta_N \right]$$

и

$$\sum_{k=1}^{10^N} \mu \left[\tilde{c}_k^N, \tilde{c}_k^N + \delta_N \right] = 10^N \cdot \frac{1}{10^{2N}} = \frac{1}{10^N}$$
.

Откуда видно, что C_1^0 измеримое по Лебегу множество нулевой меры. Обозначим

$$B_N^1 = \bigcup_{k=1}^{10^N} \left[\tilde{c}_k^N, \tilde{c}_k^N + \delta_N \right].$$

Заметим, что $B_{N+1}^1 \subset B_N^1 \quad \forall N$ и

$$C_1^0 = \bigcap_{N=1}^{\infty} B_N^1$$
.

Так как B_N^1 борелевские, то и C_1^0 принадлежит борелевской σ -алгебре. Аналогично доказывается, что множество C_2^0 также борелевское нулевой меры. Таким образом, теорема полностью доказана.

1.3. Измеримость базового отображения и свойство сохранения меры.

Теорема 2: базовое отображение измеримо и сохраняет меру.

Доказательство: учитывая замечание п.1.1., для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\forall x \in [0,1] \quad A_x = \left\{ a \in [0,1]^2 : f(a) < x \right\}$ борелевское и мера Лебега этого множества равна x ($\mu^2 A_x = x$).

Пусть

$$x = 0,x_1x_2x_3x_4x_5\ldots,$$

$$a^1 = 0,a_1^1a_2^1a_3^1\ldots,$$

$$a^2 = 0,a_1^2a_2^2a_3^2\ldots,$$

$$a = (a^1,a^2).$$

Введем следующие обозначения

$$A_x^{2N} = \left\{a \in \left[0,1\right]^2 : a_n^1 = x_{2n-1}, n = 1,\ldots,N,\ a_k^1 = x_{2k}, k = 1,\ldots,N-1, \quad a_N^2 < x_{2N}\right\},$$

$$A_x^{2N-1} = \left\{a \in \left[0,1\right]^2 : a_n^1 = x_{2n-1},\ a_n^1 = x_{2n}, k = 1,\ldots,N-1, \quad a_N^1 < x_{2N-1}\right\}.$$

Или что тоже самое

$$A_x^n = f^{-1}\left(\left[0,x_1x_2\ldots x_{n-1}000\ldots;0,x_1x_2\ldots x_n000\ldots\right]\right), n \in N.$$

Докажем что координатные прямоугольники с непересекающимися внутренностями и

$$x \notin f_{[x]}\left(\left[0,1\right]^{[x]}\right),.$$

Рассмотрим конструкцию множеств A_x^k более подробно.

Выпишем A_x^{2N}, $A_x^{2N} = \left[\alpha_1(N),\alpha_2(N)\right] \times \left[\beta_1(N),\beta_2(N)\right]$, где

$$\alpha_1(N) = 0,x_1x_3\ldots x_{2N-1}000\ldots,$$

$$\alpha_1(N) = 0,x_1x_3\ldots x_{2N-1}999\ldots,$$

$$\beta_1(N) = 0,x_2x_4\ldots x_{2N-2}000\ldots,$$

$$\beta_2(N) = 0,x_2x_4\ldots x_{2N-2}x_{2N}00\ldots,$$

$$\alpha_2(N)-\alpha_1(N)=\frac{1}{10^N},\quad \beta_2(N)-\beta_1(N)=\frac{x_{2N}}{10^N},$$

следовательно,

$$\mu^2 A_x^{2N}=\frac{x_{2N}}{10^{2N}}.$$

Выпишем $A_x^{2(N+1)}$,

$$\alpha_1(N+1)=0,x_1x_3\ldots x_{2N-1}x_{2N+1}000\ldots,$$

$$\alpha_1(N+1)=0,x_1x_3\ldots x_{2N-1}x_{2N+1}999\ldots,$$

$$\beta_1(N+1)=0,x_2x_4\ldots x_{2N-2}x_{2N}000\ldots,$$

$$\beta_2(N+1)=0,x_2x_4\ldots x_{2N-2}x_{2N}x_{2N+2}00\ldots.$$

Аналогично $A_x^{2N-1}=\left[\alpha_1'(N),\alpha_2'(N)\right]\times\left[\beta_1'(N),\beta_2'(N)\right]$, где

$$\alpha_1'(N)=0,x_1x_3\ldots x_{2N-3}000\ldots,$$

$$\alpha_1'(N)=0,x_1x_3\ldots x_{2N-1}000\ldots,$$

$$\beta_1'(N)=0,x_2x_4\ldots x_{2N-2}000\ldots,$$

$$\beta_2'(N)=0,x_2x_4\ldots x_{2N-2}999\ldots,$$

$$\alpha_2'(N)-\alpha_1'(N)=\frac{x_{2N-1}}{10^N},\quad \beta_2'(N)-\beta_1'(N)=\frac{1}{10^{N-1}},$$

следовательно,

$$\mu^2 A_x^{2N-1}=\frac{x_{2N-1}}{10^{2N-1}}.$$

Выпишем A_x^{2N+1},

$$\alpha_1'(N+1) = 0,x_1x_3\ldots x_{2N-1}000\ldots,$$

$$\alpha_1'(N+1) = 0,x_1x_3\ldots x_{2N-1}x_{2N+1}000\ldots,$$

$$\beta_1'(N+1) = 0,x_2x_4\ldots x_{2N-2}x_{2N}000\ldots,$$

$$\beta_2'(N+1) = 0,x_2x_4\ldots x_{2N-2}x_{2N}999\ldots.$$

Эти множества будут взаимно располагаться именно так, как показано на рисунке.

Таким образом,

$$\mu^2 A_x = \mu^2 \bigcup_{n=1}^{\infty} A_x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^2 A_x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} = x.$$

Необходимо отметить, что $\mu^2 A_x$ не зависит от десятичного представления числа x.

Если

$$x' = 0,x_1x_2\ldots x_k000\ldots,$$

$$x'' = 0,x_1x_2\ldots(x_k-1)999\ldots,$$

то очевидно,

$$A_{x''} \subseteq A_{x'}$$

и значит

$$\mu^2 A_{x''} = \mu^2 A_{x'} = x'.$$

Заметим что последовательность точек

$$(\alpha_i(N),\beta_i(N)) \longrightarrow f^{-1}(x), \quad (N \longrightarrow \infty),$$

Что обуславливает выбор десятичного представления чисел a^i вида $\frac{p}{10^q}$ с бесконечным числом девяток в десятичном представлении. Если выбрать альтернативное задание отображения, то последовательность $(\alpha_i(N),\beta_i(N))$ может не сходиться к точке $f^{-1}(x)$.

Теорема доказана.

1.4. Определение отображения обратного к базовому.

Как было отмечено в п.1.1., отображение *f* осуществляет инъекцию множества $[0,1]^k$ в [0,1]. Таким образом, мы фактически уже имеем определение отображения обратного к базовому на множестве $f([0,1]^k)$, остается доопредилить его на множестве $[0,1] \setminus f([0,1]^k)$, так как обратное отображение на всем пространстве R задается через обратное отображение на отрезке [0,1]. Для простоты будем считать, что $k=2$. Заметим, что

$$[0,1] \setminus f\left([0,1]^2\right) = \left\{ x \in [0,1] \mid \exists\, N_0 \in N: x_{N_0+2N} = 0\, \forall n \in N, \quad x \neq \frac{p}{10^q} \right\},$$

где $x = 0,x_1x_2x_3x_4x_5\ldots$.

Поступим следующим образом: пусть $x \in [0,1] \setminus f\left([0,1]^2\right)$, положим

$$f^{-1}(x) = \left(a^1, a^2\right),$$

где

$$a^1 = 0,x_1x_3x_5\ldots,$$

$$a^2 = 0,x_2x_4x_6\ldots.$$

Заметим, что при таком задании обратного отображения не возникает никаких проблем с выбором десятичного представления аргумента.

Отображение f^{-1} не является биективным, но сюрьективно, то есть

$$f^{-1}([0,1]) = [0,1]^2$$

и существуют точки $x_1, x_2 \in [0,1], \quad x_1 \neq x_2 : f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$. В связи с чем не возникает проблемы решать вопрос об измеримости образа обратного отображения.

Таким образом, чтобы получить $f^{-1}(x)$ надо выбрать десятичное представление числа x

$$x = 0,x_1x_2x_3x_4x_5\dots,$$

не имеющее ноль в периоде, и определить

$$f^{-1}(x) = (a^1, a^2),$$

где

$$a^1 = 0,x_1x_3x_5\dots,$$

$$a^2 = 0,x_2x_4x_6\dots.$$

1.5. Измеримость отображения обратного к базовому.

Разобьем каждую сторону квадрата $[0,1]^2$ на 10^N равных отрезка, что порождает разбиение квадрата на 10^{2N} одинаковых квадратов Δ_{ij}^N со сторонами длиной 10^{-N}. Обозначим через p_{ij}^N отрезок из $[0,1]$: $f^{-1}(p_{ij}^N) = \Delta_{ij}^N$.

Теорема 3: отображение $f^{-1}(x)$ измеримо и сохраняет меру.

Доказательство: совпадение мер прообраза и образа для отображения $f^{-1}(x)$ фактически следует из аналогичного утверждения для отображения $f(x)$,так как в этих утверждениях множества будут отличаться на множества меры ноль, что не может отразиться на результате.

Для доказательства измеримости отображения $f^{-1}(x)$ достаточно доказать, что прообраз каждого квадратика Δ_{ij}^N принадлежит борелевской σ -алгебре.

Исследуем детально вопрос о составе прообраза Δ_{ij}^N.

$$(f^{-1})^{-1}(\Delta_{ij}^N) = f\left(\Delta_{ij}^N\right) \cup \left\{x \in [0,1] \setminus f\left([0,1]^2\right) : f^{-1}(x) \in \Delta_{ij}^N\right\} =$$

$$= f\left(\partial\, \Delta_{ij}^N\right) \cup f\left(Int(\Delta_{ij}^N)\right) \cup \left\{x \in [0,1] \setminus f\left([0,1]^2\right) : f^{-1}(x) \in \Delta_{ij}^N\right\}$$

Обозначим

$$U_1 = f\left(\partial\, \Delta_{ij}^N\right), U_2 = f\left(Int(\Delta_{ij}^N)\right) = p_{ij}^N \setminus \left([0,1] \setminus f\left([0,1]^2\right)\right),$$

$$U_3 = \left\{x \in [0,1] \setminus f\left([0,1]^2\right) : f^{-1}(x) \in \Delta_{ij}^N\right\}.$$

Множество U_2 очевидно борелевское, так как $\left([0,1] \setminus f\left([0,1]^2\right)\right)$ борелевское. Если внимательно присмотреться к множествам U_1, U_3, то можно увидеть, что каждое из них представимо в виде счетных объединений следующего вида

$$U_1 = \bigcup_1^{\infty} \left\{0, l_1 l_2 \ldots l_M 9 c_1 9 c_2 9 c_3 \ldots : \quad \forall c_i \in \{0,1,\ldots,9\}\right\}$$

$$U_3 = \bigcup_1^{\infty} \left\{0, h_1 h_2 \ldots h_M 0 c_1 0 c_2 0 c_3 \ldots : \quad \forall c_i \in \{0,1,\ldots,9\}\right\}$$

Каждое множество ,стоящее в этих объединениях борелевское, это проверялось для аналогичных множеств в п.1.2.

Таким образом, множества U_1, U_2, U_3 борелевские, отсюда получаем измеримость обратного отображения $f^{-1}(x)$.

2. Связь многомерных и одномерных распределений.

В предыдущей главе были введены основные понятия, связанные с базовым отображением, и исследованы его основные функциональные свойства. В данной главе будут доказаны базисные свойства отображения, необходимые при изучении с помощью него многомерных распределений.

2.1. Отображения случайных величин.

Пусть $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ стандартное вероятностное пространство, где Ω множество элементарных событий, $\Im$ - σ -алгебра событий, $\mathbf{P}$ - вероятность. И пусть ξ случайный вектор размерности k на заданном вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$. Задача изучения свойств случайных векторов часто принципиально отличается от задачи изучения свойств одномерных случайных величин. Методы математической статистики, хорошо работающие на одномерных выборках, перестают работать на многомерных из-за резкого возрастания необходимого числа операций, либо вообще не имеют многомерных аналогов. Стоит отметить, что изучение случайных векторов, вообще говоря, не сводится к изучению координат случайного вектора, так как распределение случайных векторов не задается маргинальными распределениями (распределениями координат вектора), за исключением случая, когда координаты вектора независимы. Решение проблемы может заключаться в идее сведения изучения случайных векторов к изучению случайных величин, а точнее, построения по вектору ξ специальной случайной одномерной величины η, свойства которой содержат максимально информации о свойствах вектора ξ. Данная идея реализуется следующей схемой.

Пусть f базовое отображение, заданное в первой главе, определим случайную величину η по формуле

$\eta = f \circ \xi$. (1) Соотношение (1) позволяет строить по случайным векторам одномерные случайные величины, для теоретических исследований полезен и обратный подход. Пусть η случайная величина, построим по ней случайный вектор ξ, как

$\xi = f^{-1} \circ \eta$. (2)

На самом деле, соотношения (1), (2) задают только некоторые отображения, а то что они являются еще и случайными величинами надо доказывать. Следующая теорема отвечает на этот вопрос.

Теорема 4: Если ξ случайный вектор и $\eta = f(\xi)$, то η является случайной величиной. Если η случайная величина и $\xi = f^{-1} \circ \eta$, то ξ является случайным вектором.

Доказательство: пусть ξ случайный вектор, то есть измеримое отображение , по теореме 2 отображение f измеримо, тогда отображение η измеримо, как композиция измеримых отображений, то есть η случайная величина.

Пусть η случайная величина, по теореме 3 отображение f^{-1} измеримо, следовательно ξ измеримо, как композиция измеримых отображений, то есть ξ случайный вектор.

Следующая теорема иллюстрирует предложенный подход к изучению случайных векторов на примере равномерных распределений.

Теорема 5: пусть случайные элементы ξ и η связаны соотношениями (1), (2), тогда ξ случайный вектор, равномерно распределен на квадрате $[0,1]^k$, тогда и только тогда, когда η случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$.

Доказательство: это следует из предыдущей теоремы и свойства сохранения меры отображения f (теорема 2).

2.2. Инъекция многомерных распределений.

В данном параграфе будет доказана теорема, являющаяся ключевым утверждением в предложенном подходе изучения многомерных распределений.

Теорема 6: базовое отображение f переводит различно распределенные случайные вектора в различно распределенные одномерные случайные величины.

Доказательство: пусть ξ_1, ξ_2 различно распределенные случайные вектора, это означает, что существуют такие два борелевских множества $U_1, U_2 \subset \mathbf{R}^{\mathbf{k}}$, что

$$\mathbf{P}(\xi_1 \in U_1) \neq \mathbf{P}(\xi_2 \in U_2).$$

Из измеримости отображения f^{-1} (см. теорема 3) и иньективности отображения f следует, что множества $f(U_1), \quad f(U_2)$ борелевские и

$$\mathbf{P}(f(\xi_1) \in f(U_1)) \neq \mathbf{P}(f(\xi_2) \in f(U_2)).$$

Таким образом, случайные величины $f(\xi_1), \quad f(\xi_2)$ различно распределены, теорема доказана.

Доказанная теорема имеет глубокий смысл, оказывается, что построенная по вектору ξ одномерная случайная величина $\eta = f(\xi)$ содержит в себе полную информацию о векторе ξ, тем самым процедура снижения размерности с помощью отображения f не приводит к потере информации об исследуемом объекте.

2.3. Абсолютно непрерывные распределения.

В предыдущем параграфе была доказана теорема об инъективном отображении многомерных распределений, в случае, когда многомерные распределения абсолютно непрерывны, удается доказать более сильное утверждение.

Теорема 7: базовое отображение f осуществляет взаимно однозначное отображение множества многомерных распределений на множество одномерных распределений, причем справедлива формула

$p_\eta = p_\xi \circ f^{-1}$, (3)

где p_ξ плотность распределения случайного вектора ξ, а p_η плотность распределения одномерной случайной величины $\eta = f(\xi)$.

Доказательство: для доказательства взаимооднозначности отображения необходимо и достаточно проверить, что отображение является инъективным и сюръективным. Инъективность отображения многомерных распределений была доказана в теореме 6, проверим, что абсолютно непрерывные распределения переводятся в абсолютно непрерывные распределения.

Пусть p_ξ плотность распределения случайного вектора ξ и $\eta = f(\xi)$, из свойства сохранения меры базового отображения (теорема 3) и гл. 6 § 6 п.1 [2] следует, что случайная величина η имеет абсолютно непрерывное распределение и справедлива формула

$$p_\eta = p_\xi \circ f^{-1},$$

где p_η плотность распределения одномерной случайной величины η, а f^{-1} задано на множестве $f(\mathbf{R}^\mathbf{k})$. Так как по теореме 1 $\mu(R \setminus f(\mathbf{R}^\mathbf{k})) = 0$, то можно считать, что плотность p_η задана на всей числовой прямой.

Проверим сюрьективность отображения, то есть, что любое одномерное абсолютно непрерывное распределение имеет абсолютно непрерывный прообраз. Пусть p_η плотность распределения одномерной случайной величины η, построим случайный вектор $\xi = f^{-1} \circ \eta$, из свойства сохранения меры базового отображения (теорема 3) и гл. 6 § 6 п.1 [2] следует, что случайный вектор ξ имеет абсолютно непрерывное распределение и справедлива формула

$$p_\xi = p_\eta \circ f,$$

где p_ξ плотность распределения вектора ξ. Тогда по уже доказанному случайная величина $f(\xi)$ будет иметь абсолютно непрерывное распределение и

$$p_{f(\xi)} = p_\xi \circ f^{-1},$$

причем $p_{f(\xi)}$ будет почти всюду совпадать с p_η, то есть распределение вектора ξ можно считать абсолютно непрерывным прообразом распределения величины η.

Таким образом, базовое отображение f осуществляет взаимно однозначное отображение множества многомерных распределений на множество одномерных распределений, причем справедлива формула (3). Теорема доказана.

Предыдущая теорема дает “замечательное” соотношение между многомерными и одномерными плотностями, из него следует, что функция распределения случайной величины η почти всюду дифференцируема и ее производная почти всюду равна $p_\eta = p_\xi \circ f^{-1}$.

2.4. Связь функций распределений.

В параграфе 2.2. была доказана теорема о инъективном отображении многомерных распределений, а параграфе 2.3. была получена конкретная формула связи абсолютно непрерывных многомерных и одномерных распределений. В данном параграфе будет получена формула связи функций распределения для абсолютно непрерывных многомерных и одномерных случайных элементов.

Пусть $F(u)$ функция распределения к-мерного случайного вектора, сосредоточенного на квадрате $[0,1]^k$, а $F^*(x)$ - функция распределения одномерного распределения, полученного с помощью базового отображения из к-мерного распределения. Пусть

$$x = 0,x_1x_2x_3x_4x_5\ldots \in [0,1],$$

определим отображения

$$f_{ij,n}^{-1} : [0,1] \to [0,1], \quad i = 0,1, \quad j = 1,\ldots,k, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

следующим образом

$$f_{ij,n}^{-1}(x) = \begin{cases} f_j^{-1}(0,x_1x_2\ldots x_n000\ldots), & i = 0 \\ \tilde{f}_j^{-1}(0,x_1x_2\ldots x_n000\ldots), & i = 1 \end{cases}$$

где, как и ранее, f базовое отображение, а $\tilde{f}$ отображение альтернативное к базовому, то есть использующее конечные десятичные представления чисел вида $x = \dfrac{p}{10^q}$.

Теорема 8: функции распределений $F(u)$, $F^*(x)$ абсолютно непрерывных распределений связаны соотношением

$$F^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\theta_1,\dots,\theta_k=0,1} (-1)^{\theta_1+\dots+\theta_k} F\left(f^{-1}_{\theta_1 1,n-\theta_1}(x),\dots,f^{-1}_{\theta_k k,n-\theta_k}(x)\right).$$

Доказательство: как было отмечено при доказательстве теоремы 2,

$$A_x = \left\{a \in [0,1]^k : f(a) < x\right\},$$

$$A_x^n = f^{-1}\left(\left[0,x_1x_2\dots x_{n-1}000\dots;0,x_1x_2\dots x_n000\dots\right]\right),$$

причем множества A_x^n имеют вид координатных прямоугольников с непересекающимися внутренностями. Тогда, учитывая абсолютную непрерывность распределений, имеем

$$F^*(x) = \mathbf{P}_\xi(A_x) = \mathbf{P}_\xi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}_\xi(A_x^n),$$

Таким образом, доказательство теоремы сводится к нахождению вероятностей попадания случайного вектора ξ в прямоугольник A_x^n. Докажем, что

$$\mathbf{P}_\xi(A_x^n) = \sum_{\theta_1,\dots,\theta_k=0,1} (-1)^{\theta_1+\dots+\theta_k} F\left(f^{-1}_{\theta_1 1,n-\theta_1}(x),\dots,f^{-1}_{\theta_k k,n-\theta_k}(x)\right).$$

Из определений базового отображения и отображения альтернативного к базовому нетрудно заметить, что самый левый угол координатного прямоугольника A_x^n будет иметь координаты $\left(f^{-1}_{11,n-1}(x),\dots,f^{-1}_{1k,n-1}(x)\right)$, а самый правый - $\left(f^{-1}_{01,n}(x),\dots,f^{-1}_{0k,n}(x)\right)$. Тогда по формуле вероятности попадания в координатный прямоугольник (см. § 28 гл. 6 [4])

$$\mathbf{P}_\xi(A_x^n) = \sum_{\theta_1,\dots,\theta_k=0,1} (-1)^{\theta_1+\dots+\theta_k} F\left(f^{-1}_{\theta_1 1,n-\theta_1}(x),\dots,f^{-1}_{\theta_k k,n-\theta_k}(x)\right).$$

Теорема доказана.

3. Некоторые применения связей многомерных и одномерных распределений.

3.1. Многомерные аналоги критериев Колмогорова, Смирнова.

Полученные нами результаты о связи многомерных и одномерных распределений позволяют построить многомерные аналоги критериев Колмогорова, Смирнова (их описание см. [4]).

Пусть $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ независимая выборка взята из абсолютно непрерывного многомерного распределения с функцией $F_\xi(u)$. По этой выборке построим новую, уже одномерную, выборку

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad y_i = f(u_i)\; i = 1, \ldots, n.$$

Из теоремы 6 следует, что распределение одномерной выборки характерно только для многомерного распределения $F_\xi(u)$, причем оно абсолютно непрерывно (теорема 7). Построим для новой выборки эмпирическую функцию распределения $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{x > y_i\},$ возьмем статистику

$$D_n = \sup_x \left| F_n(x) - F_{f(\xi)}(x) \right|$$

и применим критерий Колмогорова для одномерных случайных величин, который базируется на соотношении

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \sqrt{n}\, D_n \le x \right\} = K(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2x^2}, \quad x > 0.$$

Совершенно аналогично строится многомерный аналог критерия Смирнова. Пусть $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ две независимые многомерные выборки, первая имеет функцию абсолютно непрерывного распределения $F_\xi(u)$, вторая- $F_\zeta(u)$. Построим две новые, уже одномерные, выборки

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ (z_1, z_2, \ldots, z_m),$$

для каждой из них возьмем функции распределения $F_{f(\xi)}(x)$ и $F_{f(\zeta)}(x)$, по теореме 7 они абсолютно непрерывны. Обозначим

$$D_{n,m} = \sup_x \left| F_n(x; x_1, \ldots, x_n) - F_m(x; z_1, \ldots, z_m) \right|.$$

Н.В. Смирнов доказал, что если $F_{f(\xi)}(x) \equiv F_{f(\zeta)}(x)$ и непрерывны, то при

$$n, m \to \infty, \quad \frac{n}{m} \to \tau, \quad 0 < \tau < \infty,$$

случайная величина $\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{n,m}$ имеет предельный закон

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left\{ \sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{n,m} \le x \right\} = K(x).$$

На его основании строится критерий о равенстве распределений $F_\xi(u)$, $F_\zeta(u)$.

3.2. Критерий однородности процессов восстановлений.

В предыдущем параграфе было показано, как удается, используя идею снижения размерности с помощью базового отображения, построить критерий однородности для случайных векторов. В этом параграфе будет построен критерий однородности для бесконечномерных случайных элементов, а именно, для двух процессов восстановлений.

Пусть $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ неотрицательные независимые одинаково распределенные случайные величины с непрерывной функцией распределения F(u). Положим $z_0 = 0$, $z_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$. Тогда последовательность $\{z_i\}_{i=0}^{\infty}$ представляет собой процесс восстановления. Траектория процесса на интервале времени [0,T] однозначно определяется вектором $\tau = \{\tau_1, \ldots, \tau_{\nu(T)}\}$, где $\nu(T) = \max\left\{n: \sum_{i=1}^{n} \tau_i \le T\right\}$ -число восстановлений на отрезке [0,T] .

Рассмотрим еще один процесс восстановления, порожденный непрерывным распределением G(u) и изучаемый на промежутке [0,T], и пусть траектория процесса определяется вектором $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_{\upsilon(T)}\}$, где $\upsilon(T) = \max\left\{n: \sum_{i=1}^{n} \xi_i \le T\right\}$ -число восстановлений на отрезке [0,T].

Возьмем m независимых реализаций процесса восстановления, порожденного распределением F(u), и n независимых реализаций процесса восстановления, порожденного распределением G(u). По этим данным требуется построить критерий однородности двух процессов восстановления, наблюдаемых на конечном промежутке времени [0,T].

Основная проблема построения критерия заключается в том, что элементы данных не являются независимыми, поскольку $\sum_{i=1}^{\nu[T]}\tau_i \le T$ и $\sum_{i=1}^{\upsilon[T]}\xi_i \le T$, и чем меньше временной интервал наблюдения [0,T], тем сильнее будет зависимость. Таким образом, решение поставленной задачи не сводится к применению хорошо известных критериев однородности независимых данных.

Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ совокупность базовых отображений, где f_k:$[0,1]^{k}\to[0,1]$. По векторам τ, ξ, имеющим случайное число компонент, построим случайные величины

$$\eta_1 = \nu(T) + f_{\nu[T]}\left(\frac{1}{T}\tau\right), \quad (4)$$

$$\eta_2 = \upsilon(T) + f_{\upsilon[T]}\left(\frac{1}{T}\xi\right). \quad (5)$$

Следующие теоремы утверждают, что случайные величины η_1, η_2 являются характеристиками процессов восстановления.

Теорема 9: пусть функции распределения F(u) и G(u) различны на отрезке [0,T], тогда случайные величины η_1, η_2 различно распределены.

Доказательство: предположим противное: пусть функции распределения F(u) и G(u) одинаковы на отрезке [0,T], но случайные величины η_1, η_2 одинаково распределены. Тогда для любого $k\in N$ и любого $x\in[k,k+1)$

$$P\{\eta_1 \in [k,x)\}=P\{\eta_2 \in [k,x)\},$$

но

$$P\{\eta_1 \in [k,x)\}=P\{\eta_1 \in [k,x),\nu(T)=k\}$$

и

$$P\{\eta_2 \in [k,x)\}=P\{\eta_2 \in [k,x),\upsilon(T)=k\},$$

следовательно,

$$P\{\eta_1 \in [k,x),\nu(T)=k\}=P\{\eta_2 \in [k,x),\upsilon(T)=k\}.$$

Из свойства теоремы 6 и последнего равенства получаем, что

$$P\{\tau_1 \le u_1,\dots,\tau_{\nu[T]} \le u_{\nu[T]}, \nu(T) = k\} = P\{\xi_1 \le u_1,\dots,\xi_{\upsilon[T]} \le u_{\upsilon[T]}, \upsilon(T) = k\},$$

для любого $u_i \in [0,T]$, где $i = 1,\dots,k,$ откуда

$$P\{\tau_1 \le u_1,\dots,\tau_k \le u_k, \nu(T) = k\} = P\{\xi_1 \le u_1,\dots,\xi_k \le u_k, \upsilon(T) = k\}.$$

Перейдя к пределу по $u_i \to +\infty, \quad i = 2,\dots,k,$ получаем

$$P\{\tau_1 \le u_1, \nu(T) = k\} = P\{\xi_1 \le u_1, \upsilon(T) = k\}$$

и, следовательно, по формуле полной вероятности

$$F(u_1) = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\tau_1 \le u_1, \nu(T) = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi_1 \le u_1, \upsilon(T) = k\} = \mathrm{G}(\mathrm{u}_1)$$

для любого $u_1 \in [0,T]$, что противоречит предположению.

Теорема 10: пусть функции распределения F(u) и G(u) непрерывны на отрезке [0,T], тогда случайные величины η_1, η_2 имеют непрерывные функции распределений.

Доказательство: докажем, например, непрерывность распределения случайной величины η_1. Достаточно доказать, что

$$\mathrm{P}\{\eta_1 = \mathrm{x}\} = 0 \quad \forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{R}.$$

Действительно,

$$\mathrm{P}\{\eta_1 = \mathrm{x}\} = \mathrm{P}\{\eta_1 = \mathrm{x}, \nu(\mathrm{T}) = [\mathrm{x}]\},$$

если $x \notin f_{[x]}\left([0,1]^{[x]}\right),$ то, очевидно,

$$\mathrm{P}\{\eta_1 = \mathrm{x}, \nu(\mathrm{T}) = [\mathrm{x}]\} = 0,$$

иначе имеем,

$$\mathrm{P}\{\eta_1 = \mathrm{x}, \nu(\mathrm{T}) = [\mathrm{x}]\} = \mathrm{P}\{(\tau_1,\dots,\tau_{[x]}) = \mathrm{T}f^{-1}_{[x]}(x), n(T) = [x]\} \le P\{\tau_1 = \mathrm{T}f^{-1}_{[x],1}(x)\} = ($$

.

Теорема доказана.

Перейдем теперь непосредственно к построению критерия однородности процессов восстановлений. Возьмем m реализаций одного процесса восстановлений и n реализаций другого, преобразуем их по формулам (4), (5) и так полученные одномерные выборки объемов m и n сопоставим на основе критерия однородности Колмогорова-Смирнова. Из теорем 9, 10 следует корректность так построенного статистического критерия.

3.3. Вычисление математических ожиданий.

Теорема 11: пусть ξ случайный вектор на пространстве $\mathbf{R}^{\mathbf{k}}$. $\eta = f(\xi)$ случайная величина на действительной прямой. Предположим $\varphi\mathbf{:R}^{\mathbf{k}} \to \mathbf{R}$ такое измеримое отображение, что существует $M\varphi(\xi)$. Тогда

$$M\varphi(\xi) = M\varphi \circ f^{-1}(\eta).$$

Доказательство:

$$M\varphi(\xi) = \int_{\Omega} \varphi \circ \xi(\omega) d\mathbf{P},$$

так как существует f^{-1}, то

$$M\varphi(\xi) = \int_{\Omega} \varphi \circ f^{-1} \circ f \circ \xi(\omega) d\mathbf{P},$$

обозначим $\eta = f(\xi)$, тогда

$$M\varphi(\xi) = \int_{\Omega} \varphi \circ f^{-1} \circ \eta(\omega) d\mathbf{P},$$

так как f и f^{-1} измеримые отображения, то η случайная величина и

$$M\varphi(\xi) = M\varphi \circ f^{-1}(\eta).$$

Теорема 12: пусть ξ случайный вектор с плотностью распределения p_ξ, а $\varphi\mathbf{:R}^{\mathbf{k}} \to \mathbf{R}$ такая измеримая функция, что существует математическое ожидание $M\varphi(\xi)$. Тогда оно представимо в виде одномерного интеграла

$$M\varphi(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi \circ f^{-1}(x)\, p_\xi \circ f^{-1}(x) d\mu.$$

Доказательство: пусть $\eta = f(\xi)$ случайная величина на действительной прямой. Из предыдущей теоремы следует, что

$$M\varphi(\xi) = M\varphi \circ f^{-1}(\eta).$$

По теореме 12 плотность $p_\eta = p_\xi \circ f^{-1}$, откуда

$$\int_{\mathbf{R}^k} \varphi(y)\, p_\xi(y) d\mu^k = \int_{\mathbf{R}} \varphi \circ f^{-1}(x)\, p_\xi \circ f^{-1}(x) d\mu$$

или иначе

$$M\varphi(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi \circ f^{-1}(x)\, p_\xi \circ f^{-1}(x) d\mu.$$

Следствие: для любой суммируемой функции φ на $\mathbf{R}^{\mathbf{k}}$ выполняется равенство

$$\int_{\mathbf{R}^k} \varphi(y)\, d\mu^k = \int_{\mathbf{R}} \varphi \circ f^{-1}(x)\, d\mu.$$

Замечание: Если в предыдущих утверждениях многомерные интегралы существуют в смысле Римана, то и все одномерные интегралы существуют в

смысле Римана, так как отображение f переводит множества меры ноль в множества меры ноль и для плотности $p_\eta = p_\xi \circ f^{-1}$ не может создать точек разрыва не нулевой меры.

Полученные результаты могут быть применимы для метода Монте-Карло, где требуется вычислять многомерные интегралы.

3.4. Сохранение метрик.

По теореме 6, базовое отображение переводит различно распределенные случайные вектора в различно распределенные случайные величины, естественным образом возникает вопрос, как связаны между собой метрики исходных и отображенных распределений. Учитывая специфику базового отображения, наиболее естественно первоначально рассмотреть метрику по вариации.

Пусть ξ_1, ξ_2 два случайных вектора, метрикой по вариации между вероятностными мерами $\mathbf{P}_{\xi_1}$ и $\mathbf{P}_{\xi_2}$ называется величина

$$\left\| \mathbf{P}_{\xi_1} - \mathbf{P}_{\xi_2} \right\| = \sup_U \left| \mathbf{P}_{\xi_1}(U) - \mathbf{P}_{\xi_2}(U) \right|,$$

аналогично определяется метрика по вариации для одномерных вероятностных мер $\mathbf{P}_{\eta_1}$ и $\mathbf{P}_{\eta_2}$:

$$\left\|\mathbf{P}_{\eta_1}-\mathbf{P}_{\eta_2}\right\|=\sup_V\left|\mathbf{P}_{\eta_1}(V)-\mathbf{P}_{\eta_2}(V)\right|.$$

Теорема 13: пусть ξ_1, ξ_2 два случайных вектора, а $\eta_1=f(\xi_1)$, $\eta_2=f(\xi_2)$ две отображенные случайные величины, тогда

$$\left\|\mathbf{P}_{\xi_1}-\mathbf{P}_{\xi_2}\right\|=\left\|\mathbf{P}_{f(\xi_1)}-\mathbf{P}_{f(\xi_2)}\right\|.$$

Доказательство: действительно

$$\left\|\mathbf{P}_{\eta_1}-\mathbf{P}_{\eta_2}\right\|=\sup_V\left|\mathbf{P}_{\eta_1}(V)-\mathbf{P}_{\eta_2}(V)\right|=\sup_V\left|\mathbf{P}_{\xi_1}\left(f^{-1}(V)\right)-\mathbf{P}_{\xi_2}\left(f^{-1}(V)\right)\right|\le$$

$$\le\sup_U\left|\mathbf{P}_{\xi_1}(U)-\mathbf{P}_{\xi_2}(U)\right|=\left\|\mathbf{P}_{\xi_1}-\mathbf{P}_{\xi_2}\right\|,$$

но

$$\left\|\mathbf{P}_{\xi_1}-\mathbf{P}_{\xi_2}\right\|=\sup_U\left|\mathbf{P}_{\xi_1}(U)-\mathbf{P}_{\xi_2}(U)\right|=\sup_U\left|\mathbf{P}_{\eta_1}\left(f(U)\right)-\mathbf{P}_{\eta_2}\left(f(U)\right)\right|\le$$

$$\le\sup_V\left|\mathbf{P}_{\eta_1}(V)-\mathbf{P}_{\eta_2}(V)\right|=\left\|\mathbf{P}_{\eta_1}-\mathbf{P}_{\eta_2}\right\|,$$

таким образом,

$$\left\|\mathbf{P}_{\xi_1}-\mathbf{P}_{\xi_2}\right\|\ge\left\|\mathbf{P}_{f(\xi_1)}-\mathbf{P}_{f(\xi_2)}\right\|$$

и

$$\left\|\mathbf{P}_{\xi_1}-\mathbf{P}_{\xi_2}\right\|\le\left\|\mathbf{P}_{f(\xi_1)}-\mathbf{P}_{f(\xi_2)}\right\|,$$

следовательно,

$$\left\|\mathbf{P}_{\xi_1}-\mathbf{P}_{\xi_2}\right\|=\left\|\mathbf{P}_{f(\xi_1)}-\mathbf{P}_{f(\xi_2)}\right\|.$$

Теорема доказана.

Так как базовое отображение осуществляет взаимнооднозначное отображение множества многомерных абсолютно непрерывных распределений на множество одномерных абсолютно непрерывных распределений, то естественно изучить связь $p-$ метрик.

Пусть ξ_1, ξ_2 два случайных вектора, имеющие плотности распределений p_{ξ_1}, p_{ξ_2}, $p-$ метрикой между вероятностными мерами $\mathbf{P}_{\xi_1}$ и $\mathbf{P}_{\xi_2}$ называется величина

$$\left\|\mathbf{P}_{\xi_1}-\mathbf{P}_{\xi_2}\right\|_p=\sqrt[p]{\int\limits_{\mathbf{R}^k}\left|p_{\xi_1}-p_{\xi_2}\right|^p d\mu^k},$$

аналогично определяется $p-$ метрика для одномерных абсолютно непрерывных вероятностных мер $\mathbf{P}_{\eta_1}$ и $\mathbf{P}_{\eta_2}$:

$$\left\|\mathbf{P}_{\eta_1}-\mathbf{P}_{\eta_2}\right\|_p=\sqrt[p]{\int\limits_{\mathbf{R}}\left|p_{\eta_1}-p_{\eta_2}\right|^p d\mu}.$$

Теорема 14: пусть ξ_1, ξ_2 два абсолютно непрерывно распределенных случайных вектора, а $\eta_1=f(\xi_1)$, $\eta_2=f(\xi_2)$ две отображенные случайные величины, тогда

$$\left\|\mathbf{P}_{\xi_1}-\mathbf{P}_{\xi_2}\right\|_p=\left\|\mathbf{P}_{f(\xi_1)}-\mathbf{P}_{f(\xi_2)}\right\|_p.$$

Доказательство: из следствия к теореме 11 получаем

$$\left\|\mathbf{P}_{\xi_1}-\mathbf{P}_{\xi_2}\right\|_p=\sqrt[p]{\int\limits_{\mathbf{R}^k}\left|p_{\xi_1}-p_{\xi_2}\right|^p d\mu^k}=\sqrt[p]{\int\limits_{\mathbf{R}}\left|p_{\xi_1}\circ f^{-1}-p_{\xi_2}\circ f^{-1}\right|^p d\mu}=$$

$$=\sqrt[p]{\int\limits_{\mathbf{R}}\left|p_{\eta_1}-p_{\eta_2}\right|^p d\mu}=\left\|\mathbf{P}_{\eta_1}-\mathbf{P}_{\eta_2}\right\|_p.$$

К сожалению, получить связи для других метрик на одномерных и одномерных распределениях не удалось.

3.5. Моделирование случайных векторов и случайных величин.

В параграфе 2.3. была получена формула, связывающая абсолютно непрерывные многомерные и одномерные распределения:

$$p_\eta=p_\xi\circ f^{-1},$$

где p_ξ плотность распределения случайного вектора ξ, а p_η плотность распределения одномерной случайной величины $\eta=f(\xi)$. Данный результат имеет приложение при моделировании случайных элементов.

Для моделирования случайного вектора ξ по его плотности распределения p_ξ, можно первоначально смоделировать одномерную случайную величину $\eta=f(\xi)$ по плотности распределения

$p_\eta = p_\xi \circ f^{-1}$, а затем полученную выборку преобразовать с помощью отображения f^{-1}. Данный подход позволяет использовать при моделировании случайного вектора любой размерности постоянное число датчиков. По сути, задача моделирования вектора сводится к задаче моделирования одномерной случайной величины.

Результат параграфа 2.3. можно использовать также для увеличения объемов датчиков случайных чисел. Пусть, например,

$$\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

независимая выборка равномерного распределения на отрезке $[0,1]$, а $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ совокупность базовых отображений, где f_k:$[0,1]^k \to [0,1]$. Тогда

$$\left(\left(f_k^{-1}(x_1)\right)_1, \left(f_k^{-1}(x_1)\right)_2, \ldots, \left(f_k^{-1}(x_1)\right)_k, \ldots, \left(f_k^{-1}(x_k)\right)_1, \left(f_k^{-1}(x_k)\right)_2, \ldots, \left(f_k^{-1}(x_k)\right)_k\right)$$

будет являться независимой равномерной выборкой на отрезке $[0,1]$. Стоит отметить, что данная процедура увеличения объемов датчиков приводит к переходу “качества” в “количество”, если в исходном датчике мы знали число знаков после запятой, то в преобразованном датчике мы будем знать только $f(k)$ знаков после запятой, зато отъем датчика увеличится в k раз.

Заключение.

В заключении я хотел бы привести без доказательств еще несколько результатов полученных с помощью идеи снижения размерности задачи изучения многомерных распределений.

В п. 2.3. были доказаны теоремы о связи абсолютно непрерывных многомерных и одномерных распределений, естественным образом возникает вопрос о связи гладкостей многомерных и одномерных распределений. Оказывается, что если плотность многомерного распределения непрерывна, то плотность одномерного отображенного распределения будет непрерывна во всех точках $x \neq \frac{p}{10^q}$. Однако ничего больше сказать нельзя. Из дифференцируемости плотности многомерного распределения следует недифференцируемость ни в каком смысле плотности одномерного распределения (исключение составляет равномерные распределения). И наоборот, из дифференцируемости плотности одномерного распределения следует недифференцируемость ни в каком смысле плотности многомерного распределения.

Далее мне удалось доказать, что если $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность $k-$мерных случайных векторов и ξ случайный вектор с абсолютно непрерывным распределением, то последовательность $\{f(\xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по вероятности к величине $f(\xi)$ по вероятности тогда и только тогда, когда $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ по вероятности сходится к ξ. На базе этого результата удается построить одномерную вероятностную бумагу для многомерных распределений.

Также мной исследовались отображения из $\mathbf{R}^k$ в $\mathbf{R}$ аналогичные базовому. Удалось найти необходимые и достаточные ограничения на класс аналогичных отображений с тем, чтобы они обладали основными свойствами базового отображения.

Все эти результаты еще раз подтверждают перспективность применения принципа снижения размерности задачи изучения многомерных распределений.

Литература

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. -М.: Наука, 1988.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. -М.: Наука, 1989.
3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. -М.: Наука, 1989.
4. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. -М.: Наука, 1982.
5. Шилов Г.Н., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная. Общая теория. -М.: Наука, 1967.
6. Ширяев А.Н. Вероятность. -М.: Наука, 1980.
7. Чепурин Е.В. Статистические методы в теории надежности // Обозрение прикладной и промышленной математики. -М., 1994.- Т. 1, Вып. 2.- стр. 279-330.